XIX Российский Фестиваль юных математиков

Адлер. 16 октября 2008.

Финал.

1. Будем говорить, что n множеств образуют соцветие, если их попарные пересечения совпадают (возможно, все пусты). Докажите, что для достаточно большого $N = N(n, k)$ из любых N множеств данной мощности k можно выбрать n множеств, образующих соцветие.

2. f и g – многочлены с рациональными коэффициентами. Докажите, что $f(\mathbb{Q}) = g(\mathbb{Q})$ тогда и только тогда, когда $f(x) = g(ax + b)$ для некоторых рациональных $a \neq 0$ и b.

3. Дана последовательность Фибоначчи F_n ($F_0 = 0, F_1 = 1$). Докажите, что существует такое натуральное n, имеющее не менее 100 различных простых делителей, что F_n делится на n.

4. На плоскости дан треугольник ABC. Рассмотрим всевозможные пары окружностей, касающихся прямой AB в точках A и B соответственно и имеющих общую хорду. Назовем эту хорду PQ. Докажите, что описанные окружности треугольников CPQ имеют общую точку, отличную от C, либо имеют общую касательную в точке C.

5. К двум непересекающимся окружностям с центрами O_1 и O_2 проведены общие внешние касательные AD и BE и внутренняя касательная CF. Прямая CO_1 пересекает AB в точке M, а прямая FO_2 пересекает DE в точке N. Докажите, что прямая MN делит отрезок CF пополам.

6. Найдите все операции $\star : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $(x \star z) \star (z \star y) = (x \star y) + z$.

7. Докажите, что если $-1 \leqslant x_i \leqslant 1$, $f(x) = \prod(x - x_i)$, то не существует таких чисел a, b, что $-1 < a < 0 < b < 1$ и $|f(a)| \geqslant 1$, $|f(b)| \geqslant 1$.

8. В графе $3n$ вершин, они разбиваются на три клики (полных подграфа) по n вершин. При этом не существует клики на $n + 1$ вершине. Докажите, что вершины графа можно правильно покрасить в $[5n/3]$ цветов.

9. В экзамене n вопросов, на каждый можно ответить правильно или неправильно. Никакие двое участников не ответили одинаково на все вопросы. Оценка за верный ответ на каждый вопрос выбирается из множества $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Докажите, что вариантов выбрать оценки за вопросы, при которых имеется единственный победитель (участник с максимальной суммой баллов), не меньше, чем вариантов, при которых победитель не единственный.

10. Существует ли такая последовательность натуральных чисел $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, что в ней каждое натуральное число встречается бесконечное количество раз, и при этом она чисто периодична по любому натуральному модулю?

XIX Российский Фестиваль юных математиков

Адлер. 16 октября 2008.

Финал.

1. Будем говорить, что n множеств образуют соцветие, если их попарные пересечения совпадают (возможно, все пусты). Докажите, что для достаточно большого $N = N(n, k)$ из любых N множеств данной мощности k можно выбрать n множеств, образующих соцветие.

2. f и g – многочлены с рациональными коэффициентами. Докажите, что $f(\mathbb{Q}) = g(\mathbb{Q})$ тогда и только тогда, когда $f(x) = g(ax + b)$ для некоторых рациональных $a \neq 0$ и b.

3. Дана последовательность Фибоначчи F_n ($F_0 = 0, F_1 = 1$). Докажите, что существует такое натуральное n, имеющее не менее 100 различных простых делителей, что F_n делится на n.

4. На плоскости дан треугольник ABC. Рассмотрим всевозможные пары окружностей, касающихся прямой AB в точках A и B соответственно и имеющих общую хорду. Назовем эту хорду PQ. Докажите, что описанные окружности треугольников CPQ имеют общую точку, отличную от C, либо имеют общую касательную в точке C.

5. К двум непересекающимся окружностям с центрами O_1 и O_2 проведены общие внешние касательные AD и BE и внутренняя касательная CF. Прямая CO_1 пересекает AB в точке M, а прямая FO_2 пересекает DE в точке N. Докажите, что прямая MN делит отрезок CF пополам.

6. Найдите все операции $\star : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $(x \star z) \star (z \star y) = (x \star y) + z$.

7. Докажите, что если $-1 \leqslant x_i \leqslant 1$, $f(x) = \prod(x - x_i)$, то не существует таких чисел a, b, что $-1 < a < 0 < b < 1$ и $|f(a)| \geqslant 1$, $|f(b)| \geqslant 1$.

8. В графе $3n$ вершин, они разбиваются на три клики (полных подграфа) по n вершин. При этом не существует клики на $n + 1$ вершине. Докажите, что вершины графа можно правильно покрасить в $[5n/3]$ цветов.

9. В экзамене n вопросов, на каждый можно ответить правильно или неправильно. Никакие двое участников не ответили одинаково на все вопросы. Оценка за верный ответ на каждый вопрос выбирается из множества $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Докажите, что вариантов выбрать оценки за вопросы, при которых имеется единственный победитель (участник с максимальной суммой баллов), не меньше, чем вариантов, при которых победитель не единственный.

10. Существует ли такая последовательность натуральных чисел $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, что в ней каждое натуральное число встречается бесконечное количество раз, и при этом она чисто периодична по любому натуральному модулю?