XIX Российский Фестиваль юных математиков

Четвертый тур. Лига стратегий. Решения.

1. Посадим в вершины B и A ежей массой $p-a$ и $p-b$ соответственно, в вершины C и A — енотов массами $p-a$ и $p-c$ соответственно. Сгруппируем ежей в их центре масс точке F, там окажется сосредоточена масса c, а енотов в точке E, там окажется масса b. Так что центр масс N_1 ежей и енотов лежит на EF и $N_1E : N_1F = c : b$. С другой стороны, еж в B и енот в C могут быть сгруппированы в точке M, так что N_1 лежит на AM, отсюда $N_1 = N$. Поместим в точки B и C бобров массами $p-c$ и $p-b$ соответственно. Бобры группируются в точке касания K вписанной окружности со стороной BC. Так что центр масс всех зверят лежит на отрезке KN. С другой стороны, этот центр масс есть точка I (поскольку звери в вершинах A, B, C имеют суммарные массы a, b, c соответственно). Так что I лежит на отрезке KN.

Пусть луч BI пересекает прямую EF в точке X_1. Тогда $\angle X_1IC = (\beta+\gamma)/2 = (\pi-\alpha)/2 = \angle AEF$, так что точки I, X_1, E, C лежат на одной окружности (где бы на прямой EF ни лежала точка X) и $\angle IX_1C = \angle IEC = \pi/2$, так что $X_1 = X$. По теореме о степени точки имеем $NX \cdot NE = NI \cdot NK$, аналогично $NY \cdot NF = NI \cdot NK$. Так что $NX : NY = NF : NE = b : c$, что и требовалось доказать.

2. Пусть $n > 2$ тогда заметим что НОД$(a_i, S_i) \leqslant a_i$ а тогда наша величина не больше чем 1. Возьмем набор чисел $1, 2, 3, 6, \ldots, 3 \cdot 2^{n-3}$ каждое число этого набора является делителем суммы всех чисел, а значит и суммы всех кроме него самого.

Если $n = 2$ то надо узнать максимум выражения $\frac{\text{НОД}(a,b)}{a+b} \leqslant \frac{2d}{dk+dl}$, где k и l различны, а значит максимум равен $\frac{2}{3}$, например для чисел 1 и 2.

3. Поделим обе части на $\sqrt[n]{C_n^k}$ и сократим. Получим равносильное неравенство $2 \geqslant \sqrt{n}k/(n-k+1) + \sqrt[n]{(n-k)/(k+1)}$. Обозначим $\sqrt{n}k/(n-k+1) = p$, $\sqrt[n]{(n-k)/(k+1)} = q$. Несложно выразить n через p и q: $n = (p^n + q^n + 2p^nq^2)/(1-p^nq^n)$ (кстати, $pq < 1$). Предположим, что $p + q > 2$. Уменьшим p и q до чисел a и b соответственно так, что $a + b = 2$. Тогда $n = (p^n + q^n + 2p^nq^2)/(1-p^nq^n) > (a^n + b^n + 2a^nb^n)/(1-a^nb^n)$. Положим $a = 1-x$, $b = 1+x$ ($-1 \leqslant x \leqslant 1$, $x \neq 0$, так как $ab < pq < 1$). Получим после умножения на знаменатель, что $n > (n+2)(1-x^2)^n + (1-x)^n + (1+x)^n$. По неравенству Бернулли $(1-x^2)^n \geqslant 1 - nx^2$, по биному Ньютона $(1-x)^n + (1+x)^n \geqslant 2 + n(n-1)x^2 + 2C_n^4x^4$. Отсюда

$$n \geqslant (n+2)(1-x^2)^n + (1-x)^n + (1+x)^n \geqslant (n+4) - 3nx^2 + 2C_n^4x^4.$$

Однако квадратный трехчлен $f(x^2) = 4 - 3nx^2 + 2C_n^4(x^2)^2$ имеет отрицательный дискриминант $(3n)^2 - 32C_n^4 < 0$ и не может принимать отрицательные значения.

4. Построим биекцию между этими объектами. Возьмем произвольную перестановку с k циклами. Выберем в каждом цикле максимальный элемент a_i и упорядочим эти элементы: $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$. Тогда выпишем числа в ряд так: сначала выпишем a_1, потом все элементы цикла, в котором был a_1, подряд (начиная с a_1). Дальше каждый раз первое не взятое a_i и за ним его цикл аналогичным образом. Очевидно, что в этом ряду ровно k чисел, которые больше каждого предыдущего, а именно a_i. Ясно, что для разных циклов получились разные ряды. Теперь наоборот: в каждом ряду выделим числа $b_1 < b_2 < \ldots b_k$, удовлетворяющие условию. Заметим, что все числа между b_i и b_{i+1} меньше b_i. Действительно, первое же из них, которое окажется больше b_i, будет больше всех написанных перед ним. Разобьем исходный ряд на циклы: каждый цикл содержит b_i и все числа от него до b_{i+1} (исключая b_{i+1}) в том порядке, в котором они выписаны. Очевидно, что построенное отображение - биекция.

5. Пусть I и r - центр и радиус вписанной окружности ω треугольника $\triangle ABC$. Тогда $\angle A_1IB_1 = \angle AIB = \pi - \frac{\angle BAC + \angle ABC}{2} > \frac{\pi}{2}$. Поэтому перпендикуляр h на A_1B_1 из I попадает именно на отрезок A_1B_1. $IA_1 \geqslant r$, так как r - расстояние от I до BC. Поэтому если $r > h$, то ω пересекает отрезок A_1B_1. Пусть $h \geqslant r$. Тогда $\angle IA_1B_1 \geqslant \angle IA_1B = \pi - \angle BAC - \frac{\angle CBA}{2} = \frac{\angle CBA}{2} + \angle ACB$. Аналогично $\angle IB_1A_1 \geqslant \frac{\angle CAB}{2} + \angle ACB$. Тогда $\frac{\angle BAC + \angle ABC}{2} = \pi - \angle A_1IB_1 = \angle IA_1B_1 + \angle IB_1A_1 \geqslant \frac{\angle BAC + \angle ABC}{2} + 2\angle ACB$. Противоречие.

6. Лемма: Пусть $|z| > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ тогда $|z^{k+2}| > |z^{k+1}| + |z^k|$.

Доказательство: Пусть $|z| > \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ тогда надо доказать, что $|z|^2 > |z| + 1$ что очевидно верно при $|z| > \varphi$ так как φ является бóльшим корнем нужного квадартного уравнения.

Докажем следующее утверждение: Пусть есть унитарный многочлен $P(z)$ степени n с коэффициентами 0, 1, -1, причем коэффициент при z^{n-1} равен 0. Тогда все его корни лежат в круге $|z| \leqslant \varphi$.

Заметим, что по лемме при $|z| > \varphi$

$$|z^n| > |z^{n-2}| + |z^{n-1}| > |z^{n-2}| + |z^{n-2}| + |z^{n-3}| > |z^{n-2}| + |z^{n-3}| + |z^{n-3}| + |z^{n-4}| > \ldots >$$

$$> |z^{n-2}| + |z^{n-3}| + \ldots + |z^3| + |z^2| + |z| + |z| + 1 > |P(z) - z^n|$$

а значит такое z не может быть корнем.

Вернемся к нашей великолепной задаче: если у исходного многочлена второй коэффициент равен 0, то утверждение следует из леммы. Ежели второй коэффициент $P(z)$ равен 1, то рассмотрим многочлен $P(z)\cdot(z-1)$: у него все коэффициенты будут по модулю не больше 1, и второй будет равен 0.

7. Лемма. Пусть u, v — несоединенные вершины нашего графа G, сумма степеней которых хотя бы n. Тогда если в графе $G + uv$ (добавили ребро uv) есть гамильтонов цикл, то и в G он есть. **Доказательство леммы.** Предположим, что гамильтонов цикл в новом графе проходит по ребру uv (иначе понятно). Если вершина u соединена с k вершинами цикла, то v соединена с одной из k вершин, следующих за ними в цикле (направление от v к u по длинному пути) — иначе сумма степеней u и v не больше $n-1$. Это позволяет изменить цикл, убрав при этом ребро uv.

Пользуясь леммой, проведем все ребра между вершинами, сумма степеней которых хотя бы n. Легко видеть, что найдется гамильтонов цикл $n - 1 - (n-1) - (2) - \cdots - [(n+1)/2] - n$. Значит, гамильтонов цикл был с самого начала.

8. Перепишем дробь $\frac{\sigma(k)}{k}$ как сумму обратных величин делителей k: $\frac{\sigma(k)}{k}=\sum\limits_{d|k}\frac{d}{k}=\sum\limits_{d|k}\frac{1}{d}$. Теперь исходная сумма примет вид

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma(k)}{k}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{d|k}\frac{1}{d}=\sum_{d=1}^{n}\sum_{\substack{d|k\\1\leqslant k\leqslant n}}\frac{1}{d}=\sum_{d=1}^{n}\left[\frac{n}{d}\right]\frac{1}{d}\leqslant\sum_{d=1}^{n}\frac{n}{d^2}=n\sum_{d=1}^{n}\frac{1}{d^2}.$$

Теперь утверждение задачи следует из того, что

$$\sum_{d=1}^{n}\frac{1}{d^2}<1+\sum_{d=1}^{n}\frac{1}{d(d-1)}=1+\sum_{d=1}^{n}\left(\frac{1}{d-1}-\frac{1}{d}\right)=2-\frac{1}{n}<2.$$

9. Пусть O — центр тетраэдра $ABCD$, H — его проекция на плоскость ABM. Так как OB перпендикулярно плоскости ACD, то $OB\perp AM$ и по теореме о трех перпендикулярах $HB\perp AM$. Аналогично $AH\perp BM$, так что H и есть ортоцентр треугольника ABM. Поскольку из симметрии MH проходит через середину K ребра AB, получаем, что $OH\perp HK$, так что H лежит на сфере, построенной на OK как на диаметре, а следовательно и на окружности, высекаемой этой сферой в плоскости CDK.

10. Будем для $A\subset X$ обозначать $A^c=X\setminus A$. Зафиксируем k подмножеств $C_1, C_2, \ldots, C_k$ в X и рассмотрим сумму 2^k слагаемых слева и справа, в которых $A_i\in\{C_i, C_i^c\}$. Достаточно доказать равенство только для таких A_i, а потом сложить по всем наборам разбиений (C_i, C_i^c) множества X. Заметим, что множества C_i и их дополнения делят X на 2^k кусков-атомов (возможно, пустых). Заметим, что каждый кусок один раз является пересечением $\cap A_i$ и 2^k-1 раз входит в $\cup A_i$. Отсюда все и следует.

Четвертый тур. Лига тактик. Решения.

1. Заметим, что отрезки AC и AF делятся прямой BG (общей диагональю обоих прямоугольников) пополам, следовательно $CF\|BG$. Кроме того, четырехугольники $TCHF$ и $AEHD$ вписанные (противоположные углы прямые). Поэтому $\angle EHA=\angle EDA=\angle DBC=\angle FCT=\angle THF$ что и требовалось.

2. см. решение задачи 2 из лиги стратегий.

3. Пусть α — угол между диагоналями BD и AC четырехугольника $ABCD$. Заметим, что $8=OA+OB+OC+OD\geqslant AC+BD\geqslant 2\sqrt{AC\cdot BD}\geqslant 2\sqrt{AC\cdot BD\cdot\sin\alpha}=2\sqrt{2S}=8$. Таким образом, во всех неравенствах достигается равенство, откуда $AC=BD$ и $\alpha=90^\circ$, а это и означает требуемое.

4. Заметим, что если $n=2m$, то $x^n-y^n=(x^m+y^m)(x^m-y^m)=2^k$, таким образом m тоже является решением, что невозможно, если считать, что мы выбрали минимальное подходящее четное n. В случае четного n осталось разобрать $n=4$. В этом случае мы можем считать, что x и y нечетные (иначе сократим на 2^4) и получается, что $x^2+y^2=2^{k_1}$ при нечетных x и y. Но сумма квадратов нечетных чисел дает остаток 2 от деления на 4, что означает, что $x=y=1$, но такое решение не подходит. Если же n нечетно, то (сократив на подходящую степень двойку) мы получим что x и y нечетные. Тогда $x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1}=2^{k_1}$, но при этом нечетно (так как содержит n нечетных слагамых, каждое из которых нечетное) и больше 1. Противоречие.

5. Предположим, что это неверно. Пусть с некоторого номера n_0 все члены этой последовательности одной четности, тогда разности между соседними членами этой последовательности четны. Заметим, что $[(n+1)\sqrt{2}]-[n\sqrt{2}]$, это либо 1, либо 2, и аналогично для второй последовательности. Значит, разности между соседними членами этой последовательности равны двум, трем или четырем. Четные — это только два и четыре, что означает, что начиная с n_0 верно равенство: $[(n+1)\sqrt{3}]-[n\sqrt{3}]=[(n+1)\sqrt{2}]-[n\sqrt{2}]$. Это означает, что $[(n+k)\sqrt{3}]-[n\sqrt{3}]=[(n+k)\sqrt{2}]-[n\sqrt{2}]$ для любого k. Максимальное значение правой части: $(k+2)\sqrt{2}$, минимальное значение левой: $(k-2)\sqrt{3}$, откуда $(k+2)\sqrt{2}\geqslant(k-2)\sqrt{3}$, что невозможно для всех k.

6. Домножив обе части на $1+a+b$ и раскрыв скобки полчим неравенство:

$$a^2\left(\frac{b}{3}-\frac{1}{2}\right)+a\left(\frac{1}{2}+\frac{b^2}{3}-b\right)+\frac{b}{2}-\frac{b^2}{2}\geqslant 0.$$

Заметим, что при всяком b получается квадратный трехчлен от a с отрицательным старшим коэффициентом, и, значит, достаточно проверить это неравенство в концах отрезка. Подставляем $a=0$, полчуаем неравенство $(2-b)(1+b)\geqslant 2$, которое очевидно. Аналогично, подставляя $a=1$, получаем $(3-b)(2+b)\geqslant 6$, которое тоже очевидно.

7. Пусть x_0 — общий корень. Вычитая из второго многочлена первый получаем, что $x_0=1/(t-s)$, то есть он рациональный. Значит, старший коэффициент делится на знаменатель корня, то есть $t-s=\pm1$. Подставляя в исходные многочлены корни ±1, получам ответы: $(s,t)=(2006,2007)$, $(s,t)=((-1)^n-2007,(-1)^n-2008)$.

8. Количество белых клеток должно делиться на 3. Это означает, что если n — четное, то n делится на 6, а если n — нечетное, то n^2-1 делится на 6, что и дает ответы: $n=6k, 6k\pm1$. Докажем, что при таких n перекраска возможна. Квадрат со стороной $6k$ разбивается на прямоугольники 2×3. Квадраты 5×5 и 7×7 без центральной клетки разбивается на прямоугольники 3×2, а остальные квадраты со стороной $6k\pm1$ получаются добавлением к этим углоков ширины 6, которые разбиваются на 2×3.

9. см. решение задачи 9 из лиги стратегий.

10. Будем соединять вершины ребрами пока это возможно. Пусть больше такой возможности нет, а искомой вершины не появилось. Рассмотрим вершину макмимальной степени, пусть она $239+k$. Ясно, что $k<239$, иначе можно рассматриваему вершину соединить со всеми. Тогда у всех вершин, с которыми связана вершина максимальной степени, степень не больше $239+k$, а у остальных вершин степень не больше, чем $239-k-1$. Таким образом суммарная степень не больше, чем $(239+k)(239+k+1)+(1000-(239+k)-1)(239-k-1)$, с другой стороны (так как сумма степеней не убывала), она хотя бы $239\cdot1000$. Преобразуя это неравенство получим $(239+k)(2k+1)\geqslant1000(k+1)+239$, что, очевидно, не может быть верным, если $K<239$. Противоречие.