

ХІХ Російський Фестиваль юних математиків

Адлер. 11 октября 2008.

Первый тур. Лига стратегий

1. Рассмотрим $n = k(k+1)/2$ клеток доски $k \times k$, лежащих ниже или на диагонали, ведущей из левого нижнего угла в правый верхний. Сколько существует способов расставить в них числа от 1 до n (каждое по разу) так, что $M_1 < M_2 < \dots < M_k$, где через M_i обозначено максимальное число в i -м столбце (содержащем i клеток)?

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполнено $AB = BC$ и $AD = DC$. На сторонах AB и AD выбрали точки E и F соответственно таким образом, что точки B , E , F и D лежат на одной окружности. На отрезках DE и BF построены как на основаниях равнобедренные треугольники DPE и BQF таким образом, что треугольник DPE подобен треугольнику ADC и одинаково с ним ориентирован, а треугольник BQF подобен треугольнику ABC и одинаково с ним ориентирован. Докажите, что точки P , Q и A лежат на одной прямой.

3. Сумма положительных чисел a , b , c и d равна 4. Докажите неравенство

$$\frac{a}{1+b^2c} + \frac{b}{1+c^2d} + \frac{c}{1+d^2a} + \frac{d}{1+a^2b} \geq 2$$

4. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке D . Оказалось, что $AB^2 + AC^2 = 2AD^2$. Чему равен угол между прямыми AD и BC ?

5. Дано нечетное натуральное число c . Докажите, что оно является составным тогда и только тогда, когда существует такое натуральное число $a \leq (c-3)/3$, что $(2a-1)^2 + 8c$ — точный квадрат.

6. В тетраэдре $ABCD$ определим точку H_a как проекцию вершины A на плоскость BCD , точку H_{ac} как проекцию H_a на прямую AC , аналогично определим другие такие точки. Докажите, что если плоские углы при вершине A равны, то точки H_{ab} , H_{ac} , H_{ad} , H_{ba} , H_{ca} и H_{da} лежат на одной сфере.

7. Найдите все функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию

$$f(f(x) - y) = f(x) + f(f(y) - f(-x)) + x$$

для любых вещественных чисел x и y .

8. Докажите, что число $n^7 + 7$ не может быть точным квадратом ни при каком натуральном n .

9. Докажите, что многочлен степени n не является суммой n периодических функций.

10. Докажите, что в любом полном ориентированном графе нечетное число гамильтоновых путей.

ХІХ Російський Фестиваль юних математиків

Адлер. 11 октября 2008.

Первый тур. Лига стратегий

1. Рассмотрим $n = k(k+1)/2$ клеток доски $k \times k$, лежащих ниже или на диагонали, ведущей из левого нижнего угла в правый верхний. Сколько существует способов расставить в них числа от 1 до n (каждое по разу) так, что $M_1 < M_2 < \dots < M_k$, где через M_i обозначено максимальное число в i -м столбце (содержащем i клеток)?

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполнено $AB = BC$ и $AD = DC$. На сторонах AB и AD выбрали точки E и F соответственно таким образом, что точки B , E , F и D лежат на одной окружности. На отрезках DE и BF построены как на основаниях равнобедренные треугольники DPE и BQF таким образом, что треугольник DPE подобен треугольнику ADC и одинаково с ним ориентирован, а треугольник BQF подобен треугольнику ABC и одинаково с ним ориентирован. Докажите, что точки P , Q и A лежат на одной прямой.

3. Сумма положительных чисел a , b , c и d равна 4. Докажите неравенство

$$\frac{a}{1+b^2c} + \frac{b}{1+c^2d} + \frac{c}{1+d^2a} + \frac{d}{1+a^2b} \geq 2$$

4. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке D . Оказалось, что $AB^2 + AC^2 = 2AD^2$. Чему равен угол между прямыми AD и BC ?

5. Дано нечетное натуральное число c . Докажите, что оно является составным тогда и только тогда, когда существует такое натуральное число $a \leq (c-3)/3$, что $(2a-1)^2 + 8c$ — точный квадрат.

6. В тетраэдре $ABCD$ определим точку H_a как проекцию вершины A на плоскость BCD , точку H_{ac} как проекцию H_a на прямую AC , аналогично определим другие такие точки. Докажите, что если плоские углы при вершине A равны, то точки H_{ab} , H_{ac} , H_{ad} , H_{ba} , H_{ca} и H_{da} лежат на одной сфере.

7. Найдите все функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию

$$f(f(x) - y) = f(x) + f(f(y) - f(-x)) + x$$

для любых вещественных чисел x и y .

8. Докажите, что число $n^7 + 7$ не может быть точным квадратом ни при каком натуральном n .

9. Докажите, что многочлен степени n не является суммой n периодических функций.

10. Докажите, что в любом полном ориентированном графе нечетное число гамильтоновых путей.