Двадцатый Российский фестиваль юных математиков

Третий тур. Лига стратегий.

1. Пусть h_1 и h_2 — пути из A в C и из D в B соответственно. Ясно, что они пересекаются. Пусть точка O — их первая точка пересечения (поскольку пути идут только вверх и влево, она будет первой на обоих путях). Поменяем местами начальные части путей (от A до O и от D до O). Получатся пути h_1' из A в B и h_2' из D в C. При этом O также будет первой точкой пересечения путей h_1' и h_2', поэтому исходные пути восстанавливаются по ним однозначно. Значит, эта операция дает биекцию между парами путей из A в C и B в D, и парами *пересекающихся* путей из A в B и из C в D. Следовательно, общее число пар путей из A в B и из C в D не меньше, чем число пар путей из A в C и из D в B.

2. Лемма. В обозначениях из условия задачи $\frac{AA_1}{A_1B} = \frac{PA^2}{PB^2}$.

Заметим, что если точка P — точка пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям четырехугольника $ABCD$, то во первых $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм, а во вторых расстояния от точки P до прямых AB и CD равны.

Действительно, пользуясь леммой несложно заметить, что если $PA = PC$, то

$$\frac{AA_1}{A_1B} = \frac{PA^2}{PB^2} = \frac{PC^2}{PB^2} = \frac{B_1C}{BB_1}.$$

Так как $\frac{AA_1}{A_1B} = \frac{CB_1}{B_1B}$, то $A_1B_1 \parallel AC$. Аналогично доказывается, что если $PA = PC$, то $C_1D_1 \parallel AC$. Таким образом P — точка пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям AC и BD, то $A_1B_1C_1D_1$ – параллелограмм. Заметим, что треугольник ABP по трем сторонам равен треугольнику CDP, из чего следует, что соответствующие высоты равны, а значит равны и расстояния от точки P до прямых AB и CD.

Докажем, что других таких точек P, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ является параллелограммом нет. Действительно, пусть $PA > PC$, тогда

$$\frac{AA_1}{A_1B} = \frac{PA^2}{PB^2} > \frac{PC^2}{PB^2} = \frac{B_1C}{BB_1}.$$

Так как $\frac{AA_1}{A_1B} > \frac{CB_1}{B_1B}$, то точка A_1 отрезка AB удалена от прямой AC дальше, чем точка B_1. Аналогично, точка D_1 удалена от прямой AC дальше, чем точка C_1.

Таким образом, если провести через точки A_1 и D_1 прямые, параллельные прямой AC, то продолжения отрезков A_1B_1 и D_1C_1 будут идти между этими прямыми, сближаясь к AC, и не могут быть параллельны друг другу.

3. Лемма. Дан угол AOB и точка C на отрезке OA. Окружность, проходящая через точки A и C, касается луча OB в точке M. Тогда $\angle CMA \geqslant \angle CBA$.

Выберем из всех треугольников ABC тот, в котором значение $\sin\angle ACM + \sin\angle BAM$ максимально. Обозначим через A_1 и C_1 середины отрезков BC и AB соответственно. Заметим, что один из углов ACM и BAM острый. Предположим, что угол ACM (случай когда второй угол острый можно разобрать, получив аналогичный результат). Заметим, что $\angle ACM = \angle A_1C_1M$, поэтому применяя лемму к углу A_1AC_1 и точке M получаем, что описанная окружность треугольника MC_1A_1 должна касаться луча AC_1. Тогда $\angle C_1A_1M = \angle MC_1A = \angle MAC$. Это означает, что описанная окружность треугольника AMC_1 касается прямой AC. Пусть $\angle ACC_1 = \alpha$, $\angle AC_1C = \gamma$, а $\angle C_1AM = \beta$. Тогда $\sin\alpha + \sin\beta = 2\cdot\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 2\cdot\cos\gamma\cdot\cos(\gamma+\beta)$ Заметим, что по теореме синусов для треугольника MAC выполнено равенство $\sin(\gamma+\beta) = \sqrt{3/2}\sin\gamma$. Поэтому $\sin\alpha + \sin\beta = \sqrt{3/2}\sin(2\gamma) \leqslant \sqrt{6}/2$.

4. Из условия следует, что $ab - ac - bd + cd = ad + bc$, перенося в правую часть несложно получить $ab + cd = ac + ad + bc + bd$, или что тоже самое $ab + cd = (a+b)(c+d)$.

Заметим, что $(a+b)^2 \geqslant 4ab$ и $(c+d)^2 \geqslant 4cd$. Поэтому выполнено $(a+b)^2 + (c+d)^2 \geqslant 4(a+b)(c+d)$. Перенося в левую часть получаем неравенство $(a+b)^2 - 4(a+b)(c+d) + (c+d)^2 \geqslant 0$, которое равносильно неравенству $(a+b)^2 - 4(a+b)(c+d) + 4(c+d)^2 - 3(c+d)^2 \geqslant 0$, что то же самое, что $(a+b-2(c+d))^2 - \left(\sqrt{3}(c+d)\right)^2 \geqslant 0$, и наконец $\left(a+b-\left(2+\sqrt{3}\right)(c+d)\right)\left(a+b-\left(2-\sqrt{3}\right)(c+d)\right) \geqslant 0$.

Так как $a > b > c > d$, то $a + b > c + d > \left(2-\sqrt{3}\right)(c+d)$, то $a + b \geqslant \left(2+\sqrt{3}\right)(c+d)$. Или что тоже самое

$\left(2-\sqrt{3}\right)(a+b) \geqslant c+d$, $\quad \left(3-\sqrt{3}\right)(a+b) \geqslant a+b+c+d$, $\quad \left(3-\sqrt{3}\right)\cdot 2a > \left(3-\sqrt{3}\right)(a+b) \geqslant a+b+c+d$, $\quad \left(2\left(3-\sqrt{3}\right)-1\right)a > b+c+d$, $\quad \left(5-2\sqrt{3}\right)a > b+c+d$.

Из последнего неравенства получается, что $a > \frac{1}{5-2\sqrt{3}}(b+c+d)$, то есть $a \geqslant \frac{5+2\sqrt{3}}{13}(b+c+d)$, что и требовалось доказать.

5. Предположим, что $n - b \geqslant 100\ln\ln n$. Все оценки, приводимы ниже, будут выполнены с большим запасом.

Шаг 1. Докажем, что $n < a+b < n+2\log_2 n+4$. Левое неравенство сразу следует из условия $n! = a!b!$. Обозначим степень вхождения двойки в число $k!$ через $w(k)$. Легко видеть, что $w(k) \leqslant k$. Кроме того,

$$w(k) = \sum_{i=1}^{[\log_2 k]} [k/2^i] \geqslant \sum_{i=1}^{[\log_2 k]} k/2^i > k-2-[\log_2 k].$$

По условию $w(n) = w(a)+w(b)$. Поэтому $n > a-2-[\log_2 a]+b-2-[\log_2 b] > a+b-4-2\log_2 n$, что и требовалось.

Шаг 2. Докажем, что $a^a > n^{n-b}$, или, что равносильно, $a\ln a > (n-b)\ln n$. В самом деле, $a! = n!/b! = n(n-1)\ldots(n-(n-b-1))$. Деля это на n^{n-b}, получаем:

$$\frac{a!}{n^{n-b}} = \prod_{i=1}^{n-b-1}\left(1-\frac{i}{n}\right) > \prod_{i=1}^{a-1}\left(1-\frac{i}{n}\right) > (1-1/a)(1-2/a)\ldots(1-(a-1)/a) = \frac{a!}{a^a}.$$

Отсюда сразу следует требуемое неравенство.

Шаг 3. Докажем, что (если выполнено предположение, приведенное в начале решения) $a > 4\ln n$. В самом деле, если $a \leqslant 4\ln n$, то $\ln a \leqslant \ln\ln n + \ln 4$, а $\ln 4 < \ln\ln n$ при $n > 1000$. Поэтому $a\ln a < 4\ln n\cdot 2\ln\ln n < 100\ln\ln n\ln n \leqslant (n-b)\ln n$, что противоречит результату шага 2.

Шаг 4. Докажем, что $a\ln n/a < 3\ln^2 n$. В самом деле, по первому шагу $n-b > a-2\log_2 n-4$, а тогда $a\ln a > (n-b)\ln n > a\ln n - 2\log_2 n\ln n - 4\ln n$. Отсюда $a\ln n/a < (2\log_2 n+4)\ln n < 3\ln^2 n$ при $n > 1000$.

Шаг 5. Согласно шагам 3 и 1, число a зажато между $4\ln n$ и $\frac{1}{2}(n+2\log_2 n+4) < \frac{2}{3}n$ (последнее неравенство верно при $n > 1000$). Между тем функция $x\ln n/x$ выпукла вниз, и следовательно значение $a\ln n/a$ больше ее значений в одном из концов отрезка. Тем не менее, нетрудно убедиться непосредственно, что при $n > 1000$ значения в каждой из точек $4\ln n$ и $\frac{2}{3}n$ больше, чем $3\ln^2 n$, что противоречит результату шага 4.

6. Пусть при инверсии i с центром в точке S, переводящей сферу ω в себя, точка A' переходит в точку A''. Обозначим точку касания сферы ω с плоскостью ABC через S_1. Докажем, что точка A'' лежит на сфере ω_1, касающейся сферы ω в точке S_1 и проходящей через точку S. Действительно, заметим, что так как точки A_1, A_3 и A' лежат на одной прямой, то их инверсные образы лежат на окружности, проходящей через точку S. Это означает, что точки S, A'', A_1 и A_2 лежат на одной окружности. Поэтому $AA''\cdot AS = AA_1\cdot AA_2 = AS_1^2$. Заметим, что если сфера ω_1 пересекает ребро SA в какой-то другой точке A''', то выполнено аналогичное равенство $AA''\cdot AS = AS_1^2$, немедленно приводящее к противоречию. Заметим, что при инверсии i сфера ω_1 переходит в плоскость, касающуюся сферы ω, а точки A', B' и C' лежат в этой плоскости, что завершает доказательство.

7. Утв. 1 Если у нас есть простой цикл длины $d > t$, тогда раскраска этого цикла (d,t)-периодическая.

Утв. 2 Пусть у нас есть θ-граф, то есть граф в котором 3 непересекающихся простых пути из одной вершины в другую, причем длины трех циклов равны $d_1 > t$, $d_2 > t$ и $d_3 > t$. Тогда раскраска графа (d_1,d_2,d_3,t)-периодическая.

Утв. 3 Если у двух смежных вершинам найдутся еще два непересекающихся пути длины не менее t, то есть θ-граф с длиной одного пути 1, то раскраска 2-периодическая.

Утв. 4 Такой подграф найдется.

Доказательство: Выделим из нашего графа подграф H, в котором степень каждой вершины не меньше $2t$. Этого можно добиться например выкидыванием вершины минимальной степени (разумеется возможная потеря связности при такой операции у нас беспокойство не вызывает и не должна).

В этом подграфе возьмем путь наибольшей длины $a_0a_1\ldots a_k$ очевидно, что $k \geqslant 2t$. Очевидно, что вершины a_0 и a_k связаны и все ребра из a_0 идут внутрь пути. Тогда возьмем ребро и два пути из a_0 в некоторую вершину пути a_i, где $k > i \geqslant t$ такая очевидно найдется.

Таким образом мы нашли нужный нам θ-подграф, его раскраска 2-периодическая, легко понять что тогда раскраска всего графа также содержит не более двух цветов.

8. Предположим, что такие функции f и g существуют. Ясно, что они строго возрастающие.

Лемма $f(n), g(n) \geqslant n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Несложно доказывается по индукции.

Из леммы следует, что $f(g(g(n))) < g(f(n)) \leqslant f(g(f(n)))$. Так как f возрастает, то $g(g(n)) < g(f(n))$, а так как g возрастает, то $g(n) < f(n)$ для любого n. Тогда выполнено неравенство $f(g(g(n))) < g(f(n)) < f(f(n))$. Из возрастания функции f следует, что $g(g(n)) < f(n)$. Аналогично легко доказать по индукции, что $g(g(\ldots(n)\ldots)) < f(n)$, что очевидно невозможно. Значит таких функций f и g не существует.

9. Пусть $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n$, пусть d_i количество подмножеств A_j содержащих элемент x_i. Из условия очевидно следует, что $\sum\limits_{i=1}^{n} C^2_{|A_i|} = C^2_n$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i = \sum\limits_{i=1}^{n}|A_i|$. Также отметим, что $\sum\limits_{i=1}^{n} C^2_{d_i} = \sum\limits_{i\neq j}|A_i\cup A_j|$.

По условию мы знаем, что $|A_i \cup A_j| \leqslant 1$, а надо доказать для всех пар достигается равенство. Будем доказывать, что $\sum\limits_{i=1}^{n} C_{d_i}^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} C_{|A_i|}^2 = C_n^2$.

Так как $\sum d_i = \sum |A_i|$, то достаточно доказать, что $\sum d_i^2 = \sum |A_i|^2$.

Для каждого элемента x_i рассмотрим все множества A_j его не содержащие. Если брать x_i с произвольным элементом из A_j мы будем получать различные двухэлементные подмножества, которые в свою очередь содержаться в каких-то A_l, то есть получаем $d_i \geqslant |A_j|$. Тогда выполняется неравенство $\frac{d_i}{n-d_i} \geqslant \frac{|A_j|}{n-|A_j|}$, где $x_i \notin A_j$.

Просуммируем все такие неравенства:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j:\, x_i \notin A_j} \frac{d_i}{n-d_i} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j:\, x_i \notin A_j} \frac{|A_j|}{n-|A_j|} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i:\, x_i \notin A_j} \frac{|A_j|}{n-|A_j|} = \sum_{j=1}^{n} |A_j|$$

Откуда следует что во всех неравенствах должно достигаться равенство, то есть $d_i = |A_j|$. Откуда получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} (n-d_i)d_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j:\, x_i \notin A_j} d_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j:\, x_i \notin A_j} |A_j| = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i:\, x_i \notin A_j} |A_j| = \sum_{j=1}^{n} (n-|A_j|)|A_j|$$

Отсюда очевидно следует равенство сумм квадратов, а значит и утверждение задачи.

10. Пусть $p = 2s+1$. Предположим, что $p > 3$. Несложно заметить, что все остатки в обоих наборах попарно различны, поэтому, раз эти наборы совпадают, то и суммы квадратов их элементов совпадают. Запишем это

$$(1^2+1)^2 + (2^2+1)^2 + \cdots + (s^2+1)^2 \underset{p}{\equiv} g^2 + g^4 \ldots g^{2s}.$$

Упрощая, получаем

$$1^4 + 2^4 + \cdots + s^4 + 2(1^2 + 2^2 + \cdots + s^2) + s \underset{p}{\equiv} g^2(1-g^{2s})/(1-g^2).$$

Применяя формулы для сумм квадратов и четвертых степеней получаем

$$s(s+1)(2s+1)/6 + s(s+1)(2s+1)(3s^2+3s-1)/30 + s \underset{p}{\equiv} g^2(1-g^{2s})/(1-g^2).$$

Заметим, что $g^2 - 1 \not\vdots\, p$, по малой теореме Ферма $g^{2s} \underset{p}{\equiv} 1$. Из этого следует, что $s \underset{p}{\equiv} 0$, что не верно. Значит $p \leqslant 3$. Замечая, что при $p = 3$ и $g = 2$ соответствующие наборы остатков совпадают, получаем ответ $p = 3$.

Лига тактик.

1. См. решение задачи 1 из лиги стратегий.

2. Пусть p и q — оба не тройки. Тогда, если они дают одинаковый остаток от деления на 3, то левая часть делится на 3, а правая нет, а если p и q дают разные остатки от деления на 3, то правая часть делится на 3, а левая нет. Оба такие варианта невозможны, значит либо p, либо q — это 3. Заметим, что если $p = 3$, то левая часть имеет вид $27 - q^5 \leqslant 27 - 2^5 < 0$, а правая положительна, что тоже невозможно. Значит $q = 3$ и тогда имеем: $p^3 - 243 = p^2 + 6p + 9$ откуда $252 = p(p^2 - p - 6)$. Значит, p — делитель числа $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ то есть либо $p = 2$, либо $p = 3$, либо $p = 7$. Проверяя, получаем, что подходит только послдений вариант. Ответ: $p = 7$, $q = 3$.

3. Выиграет второй игрок. Он будет после каждого хода делать так, чтобы непустыми были только коробки с нечетными номерами. В начале это так, проверим что такой ход всегда возможен. Действительно, после хода первого игрока несколько камней переместились из коробки с нечетным номером в следующую коробку, у которой четный номер. Тогда второй игрок возьмет все перемещенные камни, и передвинет в следующую коробку с нечетным номером. (Это всегда возможно, так как коробка с четным номером не может быть последней.) Таким образом у второго игрока всегда будет ход, и он не проиграет. Так как игра закончится через конечно число ходов, и второй игрок не проиграет, значит, он выиграет.

4. Заметим, что если на конце этого числа есть несколько нулей, то их четное число (так как это квадрат). Тогда, сокращая такое число на 100, мы получаем новое число с теми же свойствами. Итак, пусть последняя цифра не ноль. Тогда это числа вида $\overline{30\ldots0a} = x^2$ (наоборот быть не может, так как квадраты не оканчиваются на 3). Цифра a не может быть 2, 3, 7, 8 — на такие цифры квадраты не оканчиваются. Вариант $a = 6$ не подходит по модулю 4, вариант $a = 5$ не подходит по модулю 3, вариант $a = 9$ не подходит по модулю 9. Остаются варианты $a = 1$ и $a = 4$. В таком случае имеем:

$(x-1)(x+1)=3\cdot 2^n\cdot 5^n$ или $(x-2)(x+2)=3\cdot 2^n\cdot 5^n$. Заметим, что в обоих случаях два множителя в левой части могут иметь только общий простой делитель 2, поэтому 5^n — это часть одного из множителей. Но при $n\geqslant 2$ имеем $5^n-3\cdot 2^n>4^n-3\cdot 2^n=2^n(2^n-3)\geqslant 4$, так что это невозможно. если $n=1$, то в исходное число имеет вид $\overline{3a}$, квадрат такого вида только один — 36. Вспоминая, что в начале мы сокращали на 100, получаем окончательный ответ: $36\cdot 10^{2n}$.

5. Пусть сначала O лежит внутри треугольника ABC. Отметим точку X — середину отрезка DC. По условию имеем $BD=DO=DX=XC$. Ясно, что $OD=OX$, так как O проецируется в середину отрезка BC, а значит и DX. Тогда треугольник ODX равносторонний и его углы равны по $60°$. Треугольники ODB и OXC — равнобедренные треугольники с внешними углом при вершине, равным $60°$, значит их углы при основании равны $30°$. Отсюда $\angle BOC=120°$, и, значит, $\angle BAC=60°$. Дальше имеем $\angle BOA=180°-30°=150°$, значит $\angle BCA=75°$. Оставшийся угол треугольника ABC, следовательно, равен $45°$.

Теперь, пусть O лежит вне треугольника ABC. Это означает, что тупой именно угол BAC, так как прямая AO пересекает отрезок BC. Как и раньше отметим точку X — середину CD и заметим, что треугольник DOX равносторонний. Отсюда снова следует, что $\angle BOD=\angle XOC=30°$. Значит $\angle ACB=15°$ и $\angle ABD=45°$. Отсюда $\angle BAC=120°$ и это второй ответ.

6. Заметим, что $a_{k+1}-a_k=1$ или $a_{k+1}-a_k=2$, причем последнее верно, если число $k+1$ — квадрат. Значит, чтобы выполнялось условие задачи нам нужно найти 2010 последовательных чисел, среди которых нет квадартов (кроме, быть может, самого первого числа). Первый раз в натуральном ряду такие числа встречаются начиная с 1005^2. Значит ответ: $k=1005^2$.

7. Докажем утверждение по индукции, база очевидна. Выкинем корень дерева и все ребра, ведущие из него. Граф распадется на несколько компонент связности, каждая из которых тоже будет деревом. В них объявим корнями те вершины, которые раньше были соединены ребром с выкинутым корнем. Тогда новые числа, написанные во всех вершинах всех компонент связности будут совпадать со старыми. Если хоть в какой-то компоненте четных чисел строго больше, чем нечетных, то от возвращения корня требуемое неравенство не нарушится. Если же во всех компонентах вершин с четными и нечетными числами поровну, значит в каждой компоненте четное число вершин, и тогда в выкмнутом корне было написано четное число, то есть условие задачи снова будет выполняться.

8. Так как $x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$, то мы получаем, что достаточно доказать неравенство $6\sqrt{xy}-3\sqrt[3]{xy}\geqslant 4\sqrt{xy}-1$. Это равносильно неравенству $2\sqrt{xy}+1\geqslant 3\sqrt[3]{xy}$, что есть просто неравенство о средних для трех чисел: $\sqrt{xy},\sqrt{xy},1$.

9. Из условия задачи следует, что любые два из данных подмножеств либо не пересекаются, либо имеют ровно один общий элемент. Предположим, что какие-то два из них не пересекаются. Тогда рассмотрим все пары, образованные одним элементом первого множества и одним элементам второго. Таких пар ровно 64, но они должны лежать в разных множествах в силу нашего первого наблюдения. Это противоречие и доказывает утверждение задачи.

10. Из условия мы получаем, что $BHPD$ — параллелограмм. Значит $BD\|HP$. Заметим, что биссектриса угла AHC параллельна биссектрисе BD угла ABC (в этом легко убедится, если отразить ортоцентр относительно середины стороны и вспомнить, что симметричная точка попадает на описанную окружность). Значит, в четырехугольнике $AHCP$ диагональ HP — биссектриса. Кроме того, $PA=PC$, так как DP — серединный перпендикуляр к AC). Это означает, что $AHCP$, либо дельтоид, либо вписанный четырехугольник. Первое невозможное, так как по условию в треугольнике ABC стороны AB и AC не равны.