Двадцатый Российский фестиваль юных математиков

Четвертый тур. Лига стратегий.

1. Пусть P — точка диаметрально противоположная точке Q на вписанной окружности треугольника ABC. Заметим, что $\angle QPN = 90^\circ - \angle PNF = \angle FNK$. Также $\angle QPN = \angle PNA$, поэтому несложно заметить, что точка K лежит на биссектрисе угла FNA. Обозначим точку пересечения отрезков FN и MQ через X. Тогда $\angle AFL = \angle AMQ = \angle MPQ = 90^\circ - \angle MQP = \angle QXN = \angle LFN$. Поэтому точка K лежит на биссектрисе угла AFN. Это означает, что точка K — центр вписанной окружности треугольника AFN, то есть лежит на биссектрисе угла BAC.

2. Выберем максимальный по включению ациклический подграф H графа G. Назовём рёбра этого подграфа *выбранными*, а остальные рёбра графа G *невыбранными*. Тогда любое невыбранное ребро e содержится в каком-то цикле, содержащем только выбранные рёбра и само ребро e. Построим граф G' следующим образом: все выбранные рёбра графа G оставим на месте, а все невыбранные перевернём.

Докажем эти два утверждения. 1) G' ацикличен

2) Любой самый длинный путь между двумя вершинами G' проходит только по выбранным рёбрам.

1) G' **ацикличен.** Мы знаем, что H ацикличен и содержит все вершины G. Значит можно так упорядочить все вершины G, что выделенные рёбра ведут только из вершин с меньшими номерами в вершины с большими номерами. Мы знаем, что каждое невыделенное ребро графа G лежит в цикле, состоящем только из него и выделенных рёбер. А значит оно обязательно ведёт из вершины с большим номером в вершину с меньшим номером. А поскольку в графе G' невыделенные рёбра перевёрнуты, значит любое ребро G' идёт в положительном направлении, а значит G' ацикличен.

2) Пусть есть путь S в графе G', соединяющий вершины a и b. Докажем, что существует путь, соединяющий эти вершины, длина которого больше либо равна длине S, проходящий только по выбраным рёбрам. Действительно, мы знаем, что для любого невыбраного ребра xy графа G' найдётся путь из x в y, состоящий только из выбранных рёбер. Заменим каждое невыбранное ребро в пути S на путь из выбранных рёбер. Полученный в результате путь будет состоять только из выбранных рёбер и конечно будет несамопересекающимся, так как в ациклических графах, каковым является G' не бывает самопересекающихся путей.

Таким образом, мы нашли ациклический граф G', для которого самый длинный путь между любыми двумя вершинами состоит из рёбер, содержащихся в исходном графе G. То есть длина максимального пути не увеличилась.

3. Пусть утверждение задачи не верно. Ориентируем путь γ из условия против часовой стрелки, а его длину обозначим через ℓ. Рассмотрим ориентированный граф G, вершинами которого являются узлы решетки из условия, причем направленное ребро ведет из узла A в соседний узел B тогда и только тогда, когда длина части пути от узла A до узла B меньше $\ell/3$.

Лемма 1. В получившемся графе есть цикл, внутри которого нет узлов. *Доказательство.* Например, несложно заметить, что исходный путь нам подходит.

Лемма 2. В графе G найдется цикл длины три из соседних узлов. *Доказательство.* Рассмотрим наименьший по длине цикл, не содержащий узлов внутри. Предположим, в нем больше 3-х вершин. Ясно, что если два его соседних ребра образуют угол 60°, то он не наименьший. Если два соседних ребра образуют угол 120°, то несложно заметить, что ближайший узел лежащий на биссектрисе этого угла, лежит внутри цикла, что немедленно приводит к противоречию.

Заметим, что если узлы X, Y и K — вершины цикла из леммы 2, то они разбивают путь γ на три части длины меньше $l/3$, что немедленно приводит к противоречию.

4. Да может. Для множества $A = \{0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 12,\ 14\}$ имеем:

$A + A = [0;\ 28] \setminus \{1,\ 20,\ 27\}$, а $|A + A| = 26$;

$A - A = [-14;\ 14] \setminus \{-13,\ -6,\ 6,\ 13\}$, а $|A - A| = 25$.

5. Из условия следует, что $n = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(a_ib_j - a_jb_i)^2$. Пусть у нас есть граф с n вершинами. Будем соединять ребром вершину i и j если $a_ib_j = a_jb_i$, заметим, что если вершины i и j, а также j и k соединены, то i и k такж соединены. Заметим, что тогда наш граф распадается на некоторое количество подграфов. Из равенства суммы квадратов числу n следует, что количество ребер либо равно n, либо не превосходит $n - 3$ (либо все суммы не равные 0 равны 1, либо одна из них не меньше 4).

Таким образом у нас есть граф в котором количество антиребер равно либо n либо не больше чем $n-3$. Если граф нельзя разделить можно разделить на два размера большего 1, то у нас отсутствует не менее чем $2(n-2)$ ребер. То есть $2(n-2) \leqslant n$ откуда $n = 3$ или 4. Либо у нас есть компоненты связности размера 1 и размера $n - 1$, что также невозможно.

6. Пусть в последовательность число k стоит правее числа $k+1$, тогда во всех эквивалентных последовательностях они тоже стоят в таком порядке. Построим 2^{n^2-1} различных последовательностей. Поставим число 1, число 2 есть два способа поставить относительно числа 1, число 3 поставим в отрезок между 1 и 2 но относительно 3 есть два способа, и так далее будем ставить число $j+1$ в промежуток между $j-2$ и $j-1$, для этого есть два способа(слева или справа поставить относительно j). Легко видеть что все такие последовательности не эквивалентны

7. Сделаем неожиданную замену $x_i = \frac{1}{\cos\alpha_i}$, причем угол от 0 до $\pi/2$. Тогда нам надо найти такие i и j, чтобы $\cos(\alpha_i - \alpha_j) \geqslant \cos(\pi/6)$. Что очевидно для некоторых выполняется.

8. Корнями многочлена $x^{2n}+x^n+1$ являются числа $\exp\{2\pi i(3k\pm1)/3n\}$, где k целое. Корнями многочлена $x^{2n}-x^n+1$ являются числа $\exp\{2\pi i(6k\pm1)/6n\}$, где k целое. По условию множество чисел $\exp\{2\pi i(6k\pm1)/6m\}$ содержится в множестве $\exp\{2\pi i(3k\pm1)/3n\}$. Откуда следует, что $n \,\vdots\, 2m$. Откуда очевидным образом следует, что множество $\exp\{2\pi i(3k\pm1)/3m\}$ содержится в множестве чисел $\exp\{2\pi i(3k\pm1)/3n\}$. Отметим также, что корни все различные у каждого многочлена поэтому проблем с кратными корнями не будет.

9. Обозначим точку пересечения отрезков CP и BQ через T, а точки пересечения прямой ℓ с отрезками CP и BQ через $_1$ и B_1 соответственно.

Лемма 1. Точка T лежит на описанной окружности треугольника ABC.

Докажем, что середина L дуги BC, не содержащей точки A является центром вписанной окружности треугольника TB_1C_1. Из леммы следует, что точка L лежит на биссектрисе угла B_1TC_1. Обозначим точки пересечения прямой OI_a с отрезками CP и BQ через $_2$ и B_2. Несложно заметить, что нам достаточно доказать, что точка L лежит на биссектрисе угла TB_2C_2 (точка L лежит на биссектрисе угла TC_2B_2 аналогично, из чего следует, что точка L — центр вневписанной окружности треугольника TB_2C_2, а так как точка L — середина отрезка II_a, то ...). Заметим, что точка L лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BI_a. Поэтому нам достаточно доказать, что $I_aB_2 = B_2B$, а это следует из леммы 2.

Лемма 2. Четырехгольник OBI_aP — равнобедренная трапеция. *Доказательство.* Заметим, что $\angle PI_aB = \angle OBI_a$ (см. задачу 9 из лиги тактик). Также сделав изогональное сопряжение нетрудно получить, что $PI_a = OB$. Из вышеупомянутых выше утверждений лемма 2 следует незамедлительно.

10. Рассмотрим ближайшую к центру сферы хорду AB. Пусть через ее середину проходит хорда CD. Тогда если середина хорды CD не совпадает с серединой хорды AB, то середина хорды AB дальше от центра сферы, чем середина хорды CD, что не верно.

Четвертый тур. Лига тактик.

1. Оценим каждое слагаемое:

$$\frac{c}{1+a+b^2} \leqslant \frac{c}{2b+a} \leqslant \frac{c+(a+2c)}{2(a+b+c)}.$$

Последняя оценка верна, так как исходная дробь меньше 1 (в силу неравенства треугольника). Складывая все такие неравенства, получаем требуемое.

2. Пусть ребра покрашены в черный и белый цвет. Рассмотрим сначала только белые ребра. В каждой вершине напишем длину максимального белого пути, начинающегося в ней. Если есть вершина, с числом хотя бы n, то мы нашли то, что требуется. Пусть все числа от 0 до $n-1$. Тогда найдется хотя бы $n+1$ вершина, в которых написаны одинаковые числа. Заметим, что это означает, что между этими вершинами проведены только черные ребра. Тогда, рассмотрев только эти вершины, мы найдем среди них черный путь длины n.

3. Во-первых, заметим, что данное в условии неравенство - строгое. Сократим обе части неравенства на максимально возможную степень 2. Неравенство примет вид $2^{2m_1+1} > n_1^2$, где n_1 — нечетное. Значит верно, что $2^{2m_1+1} \geqslant n_1^2+1$. Если мы сокращали хотя бы два раза (то есть хотя бы на 16), то умножая, мы получил требуемое. Пусть мы сократили не больше одного раза. Тогда левая часть делится на 8, а правая дает остаток 1 от деления на 8 (квадрат нечетного числа). Значит, разница между левой и правой частью хотя бы 7, что и требовалось доказать.

4. См. решение задачи 4 из лиги стратегий.

5. См. решение задачи 5 из лиги стратегий.

6. Заметим, что корни трехчлена cx^2+bx+a — это $\frac{1}{p_1}$ и $\frac{1}{p_2}$ (Это легко видеть простой подстановкой). Рассмотрим порядок, в котором образуется прогрессия. Если $q_1 = \frac{1}{p_2}$, то $p_1 + \frac{1}{p_1} = p_2 + \frac{1}{p_2}$, что влечет либо $p_1 = p_2$, либо $p_1 = q_1$, — в любом случае противоречие с тем, что все корни различны. Значит, $q_2 = \frac{1}{p_2}$, что означает следующее: $p_1 - \frac{1}{p_1} = p_2 - \frac{1}{p_2}$. Отсюда либо $p_1 = p_2$ (опять противоречие), либо $p_1 = -\frac{1}{p_2}$ откуда $p_1p_2 = -1 = \frac{c}{a}$, что и требовлось доказать.

7. Из условия следует, что $\angle CAN = \angle MBA$. Теперь продлим медиану BM за точку M на ее длину и отметим точку D. Четырехугольник $ADCB$ — параллелограмм, значит $\angle BDC = \angle MBA = \angle CAN$. Отсюда четырехугольник $DCNA$ — вписанный, а значит $\angle MNA = \angle DCA = \angle CAB$ и $\angle MNC = \angle DAC =$

$\angle ACB$. Отсалось заметить, что сумма угла при основании равнобедренного треугольника и половины угла при его вершине как раз равна 90°.

8. Разобъем мысленно точки на 180 пар соседних и пронумеруем эти пары числами 1, 2 и 3 по циклу. Теперь первый игрок будет делать ходы так, чтобы в каждой паре, отмеченной числом k была хотя бы одна точка k-го цвета. Для этого он первый ход делает в любую пару согласно этому правилу, а затем ходит в ту же пару, что и второй, точкой нужного цвета. Если ему встретиться уже покрашенная им в начале точка, он покрасит какую-либо другую точку в пустой паре. Заметим, что любые 7 подряд идущих точек содержат три подряд идущие пары нашего разбиения, и, значит, среди них будут точки все трех цветов. Таким образом, первый игрок выиграет.

9. Обозначим углы треугольника ABC соответственно α, β и γ. Пусть сначал $\angle AOC = 2\beta$ (то есть $\angle ABC \leqslant 90^\circ$). Тогда $\angle OCA = \frac{\pi}{2} - \beta$, $\angle ACI_b = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$, откуда $\angle OCI_b = \pi - \beta - \frac{\gamma}{2}$. С другой стороны $\angle AI_bC = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}$ (из суммы углов треугольника AI_bC, а $\angle DAC = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, откуда $\angle DI_bA = \frac{\alpha}{2}$. Тогда получаем, что $\angle DI_bC = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2}$. Требуемое равенство проверяется непосредственно. Случай, когда $\angle AOC = 2\pi - 2\beta$ (то есть $\angle ABC$) тупой, проверяется аналогично.

10. См. решение задачи 10 из лиги стратегий.