

Двадцатый Российский Фестиваль юных математиков

Адлер. 15 октября 2009 г.

Второй тур. Лига тактик

1. Вася и Петя по очереди выкладывают на единичный отрезок меньшие отрезки. Первым ходом Вася кладет отрезок длины $1/2$, а каждый следующий отрезок вдвое короче предыдущего. Выкладываемые отрезки не могут иметь общих внутренних точек и выходить за границы исходного отрезка. Проигрывает не имеющий хода. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш?

2. Бесконечная клетчатая плоскость разбита на трехклеточные уголки. Докажите, что существуют еще два разбиения плоскости на уголки, в которых нет общих уголков, а также нет общих уголков с исходным разбиением.

3. Натуральные числа a , b и n таковы, что $a^2 + 2nb^2$ — точный квадрат. Докажите, что число $a^2 + nb^2$ представляется в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.

4. В стране есть 2009 аэропортов, некоторые из которых соединены прямыми авиарейсами. После государственного переворота новый президент приказал перестроить систему авиалиний так, чтобы для каждого аэропорта изменилось количество обслуживаемых им рейсов. Докажите, что этот приказ может быть выполнен.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ оказалось, что $\angle CBD = 2\angle ADB$, $\angle ABD = 2\angle BDC$ и $AB = BC$. Докажите, что $AD = CD$.

6. Все точки окружности покрашены в красный и синий цвет так, что у любого вписанного в эту окружность правильного треугольника не менее двух красных вершин. Докажите, что найдется вписанный в эту окружность правильный пятиугольник, у которого не менее четырех красных вершин.

7. Решите в вещественных числах уравнение $[x[x]] = 1$. (Через $[x]$ обозначается целая часть числа x , т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x .)

8. Вещественные числа a , b и c не меньше 1. Докажите неравенство

$$\frac{1+ab}{b+c} + \frac{1+bc}{c+a} + \frac{1+ca}{a+b} \geq 3.$$

9. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ стороны CD и DA равны. На сторонах AB и BC выбраны точки E и F соответственно таким образом, что $\angle ADC = 2\angle EDF$. Отрезки DK и DM являются соответственно высотой и медианой треугольника DEF . Точка L симметрична точке K относительно точки M . Докажите, что прямые DM и BL параллельны.

10. Пусть n — натуральное число, а k — нечетное натуральное число. Целые числа a , b и c удовлетворяют соотношению

$$a^n + kb = b^n + kc = c^n + ka.$$

Докажите, что $a = b = c$.