Двадцать Первый Российский Фестиваль юных математиков

Адлер. 18 октября 2010. Финал.

1. Точка I_a — центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны BC. Окружность, проходящая через точки C и I_a, и касающаяся прямой AC, пересекает прямую I_aB в точке M, а прямую AM — в точке N. Биссектриса угла ABC пересекает отрезок MC в точке K. Найдите угол MNK.

2. Выпуклый многоугольник на плоскости таков, что его образ при любом параллельном переносе содержит точку с целыми координатами. Докажите, что расстояние между какими-то двумя вершинами многоугольника не меньше $\sqrt{2}$.

3. Дано простое число p. Для скольких чисел $a \in \{0, 1, \dots, p^2 - 1\}$ сравнение $x^p + ay^p \equiv N \pmod{p^2}$ разрешимо при всех целых N?

4. Внутри данного треугольника ABC выбирается точка X. Прямые AX, BX, CX пересекают противоположные стороны треугольника в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Прямая B_1C_1 пересекает прямую BC в точке A_2, прямая AA_2 пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке A_3. Докажите, что все прямые A_3A_1 проходят через одну и ту же точку, не зависящую от выбора точки X.

5. Три натуральных взаимно простых в совокупности числа таковы, что квадрат разности любых двух из них делится на третье. Докажите, что среди этих чисел не менее двух точных квадратов.

6. Дано четное натуральное число n. Рассмотрим множество A всех последовательностей длины n, состоящих из нулей и единиц. Рассмотрим такое подмножество B множества A, что для каждой последовательности $x \in A$ найдется такая последовательность $y \in B$, что y отличается от x не более, чем в одном месте. Докажите, что $|B| \geqslant \frac{2^n}{n}$.

7. Даны натуральные числа m и k. При этом m — нечетное и $m \geqslant 3$. Найдите наименьшее натуральное число N, для которого при любой покраске элементов множества $\{0, 1, \dots, N\}$ в два цвета уравнение $k + x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1} = x_m$ имеет одноцветное решение.

8. По кругу расставлены 100 неотрицательных чисел таким образом, что сумма любых трех чисел, стоящих подряд, не превосходит 1. Числа, стоящие на четных местах перемножили. Затем числа, стоящие на нечетных местах, перемножили. Какое максимальное значение может принимать сумма полученных произведений?

9. Пусть G — полный сильно связный ориентированный граф на n вершинах. Докажите, что его вершины можно занумеровать натуральными числами от 1 до n так, что $(1, 2)$, $(2, 3)$, $\dots$,$(n-1, n)$, $(n, 1)$ и $(3, 1)$ суть направленные ребра графа G.

10. Отображение $\Phi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ назовем *фробениусом*, если для любых многочленов $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ и вещественных чисел a, b выполняются равенства

(i) $\Phi(af + bg) = a\Phi(f) + b\Phi(g)$;

(ii) $\Phi(f^3) = 3\Phi(f)\Phi(f^2) - (\Phi(f))^3$.

Сколько существует фробениусов, для которых $\Phi(x^{2009}) = 0$, $\Phi(x^{2010}) = -1$?