Двадцать Второй Российский Фестиваль юных математиков

Анапа. 10 октября 2011

Финал. Старшая лига

1. Имеется 100 образцов, среди которых ровно 50 радиоактивных. Есть прибор, в который за одну операцию можно положить два образца, и если ровно один из них радиоактивен, то прибор укажет на него, а если нет, то на любой из двух образцов. За какое наименьшее число операций можно найти хотя бы один радиоактивный образец?

2. Даны натуральные числа m, n, k. Известно, что все достаточно большие натуральные числа, кратные m, представимы в виде суммы $p_1^k + p_2^k + \ldots + p_n^k$, где p_i — простые числа (не обязательно различные). Докажите, что все достаточно большие числа можно представить в виде суммы $p_1^k + p_2^k + \ldots + p_{n+m}^k$, где p_i — простые числа (не обязательно различные).

3. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC, касается стороны AB и пересекает сторону BC в точке P. Биссектриса угла B пересекает в точке K касательную к окружности, проведенную в точке P, и в точке L — отрезок AP. Докажите, что $\angle LAK = \angle LCB$.

4. Решите систему уравнений в вещественных числах: $\frac{3x-y}{x-3y} = x^2$, $\frac{3y-z}{y-3z} = y^2$, $\frac{3z-x}{z-3x} = z^2$.

5. Даны многочлены $f(x)$ и $g(x)$ с целыми коэффициентами и единичными свободными членами. Оказалось, что если для некоторых целых чисел m и n числа $f(m)$ и $f(n)$ взаимно просты, то $g(m)$ и $g(n)$ взаимно просты. Докажите, что $(f(x))^k \,\vdots\, g(x)$ для некоторого натурального k.

6. Пусть $A_1A_2A_3\ldots A_n$ — ломаная в пространстве. Обозначим через s_i максимальную площадь треугольника $A_iA_{i+1}A_j$, $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ (полагаем $A_{n+1} = A_1$). При каком наибольшем α для любой ломаной выполняется неравенство $s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1} \geqslant \alpha s_n$?

7. Дана выпуклая шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с равными боковыми ребрами ($SA = SB = SC = SD = SE = SF$). Докажите, что сумма двугранных углов при ребрах SA, SC и SE равна сумме двугранных углов при ребрах SB, SD и SF.

8. Пусть T — конечный набор ограниченных связных клетчатых фигур. Будем называть прямоугольник $m \times n$ *хорошим*, если его можно разбить на фигурки из набора T (разрешены повороты и перевороты). Пусть k_n — это количество хороших прямоугольников со сторонами не больше n, а $r_n = k_n/n^2$. Докажите, что последовательность r_n имеет рациональный предел.

9. Пусть $k \leqslant n$, а $x_1, x_2, \ldots, x_{n+k}$ — положительные числа с суммой $n+k$. Докажите неравенство $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+k} \frac{x_i^n}{x_i x_{i+1} \ldots x_{i+k-1} + x_{i+k} \ldots x_{i+n+k-1}} \geqslant \frac{n+k}{2}$. Нумерация переменных циклическая.

10. В компании из n человек некоторые пары дружат, а некоторые другие враждуют, при этом у каждого не более пяти врагов. Известно, что в любом множестве людей, среди которых нет пар врагов, имеется не более чем k пар друзей. Докажите, что общее количество пар друзей не превосходит $2^{2011}k$.

Двадцать Второй Российский Фестиваль юных математиков

Анапа. 10 октября 2011

Финал. Старшая лига

1. Имеется 100 образцов, среди которых ровно 50 радиоактивных. Есть прибор, в который за одну операцию можно положить два образца, и если ровно один из них радиоактивен, то прибор укажет на него, а если нет, то на любой из двух образцов. За какое наименьшее число операций можно найти хотя бы один радиоактивный образец?

2. Даны натуральные числа m, n, k. Известно, что все достаточно большие натуральные числа, кратные m, представимы в виде суммы $p_1^k + p_2^k + \ldots + p_n^k$, где p_i — простые числа (не обязательно различные). Докажите, что все достаточно большие числа можно представить в виде суммы $p_1^k + p_2^k + \ldots + p_{n+m}^k$, где p_i — простые числа (не обязательно различные).

3. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC, касается стороны AB и пересекает сторону BC в точке P. Биссектриса угла B пересекает в точке K касательную к окружности, проведенную в точке P, и в точке L — отрезок AP. Докажите, что $\angle LAK = \angle LCB$.

4. Решите систему уравнений в вещественных числах: $\frac{3x-y}{x-3y} = x^2$, $\frac{3y-z}{y-3z} = y^2$, $\frac{3z-x}{z-3x} = z^2$.

5. Даны многочлены $f(x)$ и $g(x)$ с целыми коэффициентами и единичными свободными членами. Оказалось, что если для некоторых целых чисел m и n числа $f(m)$ и $f(n)$ взаимно просты, то $g(m)$ и $g(n)$ взаимно просты. Докажите, что $(f(x))^k \,\vdots\, g(x)$ для некоторого натурального k.

6. Пусть $A_1A_2A_3\ldots A_n$ — ломаная в пространстве. Обозначим через s_i максимальную площадь треугольника $A_iA_{i+1}A_j$, $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ (полагаем $A_{n+1} = A_1$). При каком наибольшем α для любой ломаной выполняется неравенство $s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1} \geqslant \alpha s_n$?

7. Дана выпуклая шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с равными боковыми ребрами ($SA = SB = SC = SD = SE = SF$). Докажите, что сумма двугранных углов при ребрах SA, SC и SE равна сумме двугранных углов при ребрах SB, SD и SF.

8. Пусть T — конечный набор ограниченных связных клетчатых фигур. Будем называть прямоугольник $m \times n$ *хорошим*, если его можно разбить на фигурки из набора T (разрешены повороты и перевороты). Пусть k_n — это количество хороших прямоугольников со сторонами не больше n, а $r_n = k_n/n^2$. Докажите, что последовательность r_n имеет рациональный предел.

9. Пусть $k \leqslant n$, а $x_1, x_2, \ldots, x_{n+k}$ — положительные числа с суммой $n+k$. Докажите неравенство $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+k} \frac{x_i^n}{x_i x_{i+1} \ldots x_{i+k-1} + x_{i+k} \ldots x_{i+n+k-1}} \geqslant \frac{n+k}{2}$. Нумерация переменных циклическая.

10. В компании из n человек некоторые пары дружат, а некоторые другие враждуют, при этом у каждого не более пяти врагов. Известно, что в любом множестве людей, среди которых нет пар врагов, имеется не более чем k пар друзей. Докажите, что общее количество пар друзей не превосходит $2^{2011}k$.