Двадцать Второй Российский Фестиваль юных математиков

Анапа. 10 октября 2011

Финал. Младшая лига

1. Имеется 100 образцов, среди которых ровно 50 радиоактивных. Также имеется прибор, в который за одну операцию можно положить два образца и если среди положенных образцов ровно один радиоактивен, то прибор укажет на него, а если нет, то на любой из двух образцов. За какое наименьшее число операций можно найти хотя бы один радиоактивный образец?

2. Произведение положительных чисел a, b, c, d и e равно 1. Докажите неравенство

$$\sum_{\text{cycl}} \frac{a^3}{ab+cde} \geqslant \frac{5}{2}\,.$$

3. Точка H — ортоцентр, I — центр вписанной окружности остроугольного треугольника, r — ее радиус. Докажите, что $IH \leqslant r\sqrt{2}$.

4. В полном графе графе с 200 вершинами на каждом ребре ввели ориентацию. Докажите, что в получившемся графе можно выбрать ориентированный путь из 199 звеньев, в котором первые 100 ребер ориентированы в сторону начала пути, а следующие 99 — в сторону конца.

5. Число $\sqrt{23}$ записали в виде бесконечной десятичной дроби. Докажите, что ни при каком $n > 2011$ в ней не могут встречаться нули на местах с n–го по $2n$–е включительно.

6. Дана ломаная $A_1A_2A_3\ldots A_n$. Обозначим через s_i максимальную из площадей треугольников $A_iA_{i+1}A_1$, $A_iA_{i+1}A_2$, $\ldots$, $A_iA_{i+1}A_n$ (при $i=n$ полагаем $A_{i+1}=A_1$). Докажите, что для любой такой ломаной выполняется неравенство $s_1+s_2+\ldots+s_{n-1} \geqslant s_n$.

7. Найдите все натуральные n, для которых C_{2n}^{2k} делится на C_n^k при всех $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

8. Высоты BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекают биссектрису угла BAC в точках P и Q соответственно. Пусть R — такая точка, что $PR \parallel AB$, $QR \parallel AC$. Касательные в точках B и C к описанной окружности треугольника ABC пересекаются в точке L. Докажите, что точки A, R и L лежат на одной прямой.

Двадцать Второй Российский Фестиваль юных математиков

Анапа. 10 октября 2011

Финал. Младшая лига

1. Имеется 100 образцов, среди которых ровно 50 радиоактивных. Также имеется прибор, в который за одну операцию можно положить два образца и если среди положенных образцов ровно один радиоактивен, то прибор укажет на него, а если нет, то на любой из двух образцов. За какое наименьшее число операций можно найти хотя бы один радиоактивный образец?

2. Произведение положительных чисел a, b, c, d и e равно 1. Докажите неравенство

$$\sum_{\text{cycl}} \frac{a^3}{ab+cde} \geqslant \frac{5}{2}\,.$$

3. Точка H — ортоцентр, I — центр вписанной окружности остроугольного треугольника, r — ее радиус. Докажите, что $IH \leqslant r\sqrt{2}$.

4. В полном графе графе с 200 вершинами на каждом ребре ввели ориентацию. Докажите, что в получившемся графе можно выбрать ориентированный путь из 199 звеньев, в котором первые 100 ребер ориентированы в сторону начала пути, а следующие 99 — в сторону конца.

5. Число $\sqrt{23}$ записали в виде бесконечной десятичной дроби. Докажите, что ни при каком $n > 2011$ в ней не могут встречаться нули на местах с n–го по $2n$–е включительно.

6. Дана ломаная $A_1A_2A_3\ldots A_n$. Обозначим через s_i максимальную из площадей треугольников $A_iA_{i+1}A_1$, $A_iA_{i+1}A_2$, $\ldots$, $A_iA_{i+1}A_n$ (при $i=n$ полагаем $A_{i+1}=A_1$). Докажите, что для любой такой ломаной выполняется неравенство $s_1+s_2+\ldots+s_{n-1} \geqslant s_n$.

7. Найдите все натуральные n, для которых C_{2n}^{2k} делится на C_n^k при всех $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

8. Высоты BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекают биссектрису угла BAC в точках P и Q соответственно. Пусть R — такая точка, что $PR \parallel AB$, $QR \parallel AC$. Касательные в точках B и C к описанной окружности треугольника ABC пересекаются в точке L. Докажите, что точки A, R и L лежат на одной прямой.