Двадцать Второй Российский Фестиваль юных математиков

Решения Старшей Лиги.

1. Ответ: $(3^n+1)/2$. Обозначим за f_n и g_n количество слов длины n содержащее соответственно четное и нечетное число букв *ю*. Тогда $f_n = 2*f_{n-1}+g_{n-1} = f_{n-1}+(f_{n-1}+g_{n-1}) = f_{n-1}+3^{n-1}$. Значит $f_n = 3^{n-1}+\ldots+1+f_0 = (3^n-1)/2+f_0 = (3^n-1)/2+1 = (3^n+1)/2$.

А вот прямое рассуждение — количество слов длины n, в которых ровно k букв *ю*, — $C_n^k 2^{n-k}$. Поэтому разность между числом слов с четным количеством букв *ю* и с нечетным равна

$$(-1)^n \sum_k C_n^k(-2)^{n-k} = (-1)^n(1-2)^n.$$

2. Ответ: Выигрывает второй игрок. Будем считать,что они играют на числах записанных в системе счисления с основанием 2011. Утверждаем, что проигрышными позициями являются те, у которых число заканчивается на нечетное число 0, остальные соответственно выигрышные.

Если число заканчивается, на нечетное число 0, то после любого хода, оно заканчивается на четное число 0 (либо на один 0 меньше, либо их не будет).

Если число заканчивалось, на четное число 0, и они есть на конце, тогда можно поделить на 2011 и станет нечетное число нулей. А если их нет на конце, то два варианта в данной момент число однозначное (сразу выигрываем), либо нет. Во втором случае обозначим за k количество нулей перед последней цифрой, тогда поделив на 2011, нулей на конце будет k, а если вычесть последнюю цифру, то станет $k+1$, одно из них нечетное, а значит есть ход в проигрышную позицию.

Так как 2011^{2011} заканчивается на нечетное число нулей в нашей системе счисления, то значит позиция проигрышная.

3. Докажем, что каждое из условий равносильно вписанности $ABCD$. Для этого докажем, что первое условие равносильно подобию треугольников AOD и BOC (второе условие аналогичным образом будет равносильно подобию треугольников AOB и DOC).

Пусть точка O' на луче NO такова, что $\angle O'AN = \angle OBN$. Тогда треугольник $O'AN$ подобен треугольнику OBL по двум углам, и следовательно треугольник $O'AD$ подобен треугоьнику OBC. Тогда $\angle AO'D = \angle BOC = \angle AOD$, следовательно точки O и O' совпадают. С другой стороны равенство углов ANO и BLO очевидным образом следует из подобия треугольников AOD и BOC.

4. Ответ: $n=3$. Заметим, что $(2^x-1) \vdots 7 \Leftrightarrow x \vdots 3$. Так как $2^{n+1}-1$ не делится на 7, значит либо n либо $n+2$ делится на 3, следовательно либо 2^n-1 либо $2^{n+2}-1$ делится на 7. Но они оба у нас простые, значит какое то из них равно 7, тогда n равно 1 или 3. $n=1$ не подходит, а $n=3$ подходит.

5. Ответ: это неверно.

Например, рассмотрим граф с 35 вершинами: A, B_1, ..., B_{17}, C_1, ..., C_{17}, в котором вершина A соединена со всеми вершинами B_i и только с ними; каждая вершина B_i соединена только с A и с C_i; и, наконец, все вершины C_i соединены друг с другом. Пусть ребра этого графа покрашены в 4 цвета.

Так как из вершины A выходят 17 ребер, то какие-то пять из них заведомо одного цвета. Будем считать, что это ребра AB_1, AB_2, ..., AB_5. Среди ребер B_1C_1, B_2C_2, ..., B_5C_5 есть два ребра, покрашенных одинаково. Пусть это будут ребра B_1C_1 и B_2C_2. Тогда любой путь из вершины B_1 в B_2 содержит два одинаково покрашенных ребра.

6. Обозначим радиус-вектора наших точек из центра сферы через x_i $(i=1,2,3,4)$. Тогда сумма квадратов попарных расстояний между нашими точками равна $\sum_{i<j}(x_i-x_j)^2 = 16R^2 - (\sum x_i)^2$, где R — радиус сферы. Таким образом, $\sum P_iP_j^2 \leqslant 16R^2$. Но по неравенству о средних

$$\sum_{i<j}\frac{1}{P_iP_j} \geqslant \frac{36}{\sum_{i<j}P_iP_j} \geqslant \frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{\sum_{i<j}P_iP_j^2}} \geqslant \frac{6\sqrt{6}}{4R},$$

и все неравенства обращаются в равенство только для правильного тетраэдра.

7. Ответ: $f(x)=x$, $f(x)=1$. Заметим, что $f^2(x)-f(x)f(y)+f^2(y) = f(x^2-xy+y^2) = f((x-y)^2 - x(x-y)+x^2) = f^2(x-y)-f(x)f(x-y)+f^2(x)$ откуда $0 = f^2(x-y)-f(x)f(x-y)-f^2(y)+f(x)f(y) = (f(x-y)-f(y))(f(x-y)+f(y)-f(x))$ таким образом либо $f(x-y)=f(y)$ либо $f(x)=f(x-y)+f(y)$. То есть $f(a+b)=f(a)+f(b)$, если $f(a)\neq f(b)$. Подставим в условие $x=y$, откуда $f(x^2)=f^2(x)$, откуда $f(1)=1$. Пусть k наименьшее натуральное число такое, что $f(k)\neq 1$ (если такого нет, то $f(x)=1$). Тогда $f(k+1)=f(k)+f(1)$, и более того $f(k+n)=f(k)+n$ для любого целого неотрицательного n. Заметим, что $k^2\geqslant k$, откуда $f(k)^2 = f(k^2) = f(k)+k^2-k$, что равносильно тому, что $f(k)=k$, либо $f(k)=-k+1\leqslant 0$, что невозможно.

8. Пронумеруем монеты от 1 до 2011 по порядку. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ — номера монет, лежащих решкой. Рассмотрим знакопеременную сумму $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{k+1}a_k$. Легко проверить, что при операциях с не крайними монетами она не меняется, при операции с монетой 2011 меняется на 2012, при операции с монетой 1 меняет знак. В конце она должна стать равна 1006, значит, в начале она должны была быть кратна 1006. Это возможно только для средней монеты. Для нее несложно привести пример, как все монеты становятся решками (проводим операции с монетами 1006; 1005, 1007; 1004, 1006, 1008; $\ldots$).

9. Пусть точки A' и C' на диагоналях AC и BD соответственно таковы, что четырехугольники $ADA'F$ и $BCB'F$ вписанные. Тогда $(DF, AF) = (DA', AA') = -(CA', DA')$. С другой стороны $(BF, CF) = (BB', CB') = -(CB', DB')$. Т.к. $(DF, AF) = (BF, CF)$, то $(CB', DB') = (CA', DA')$, и поэтому точки A', B', D, C лежат на одной окружности. Тогда $(B'A', AA') = (B'D, CD) = (BB', AB)$, а значит точки A', B', A, B лежат на одной окружности. Тогда $AE \cdot EA' = BE \cdot EB'$, следовательно точка E лежит на радикальной оси окружностей из условия. Это означает, что прямая EF — радикальная ось этих окружностей, а значит $EF \perp O_1O_2$.

10. Рассмотрим k–ые степени $\alpha_1^k, \ldots, \alpha_n^k$ корней нашего многочлена (с учетом кратности). Из основной теоремы о симметрических многочленах следует, что они снова будут корнями многочлена с целыми коэффициентами, причем сумма модулей коэффициентов будет не больше, чем 2^n. Таким образом, набор $(\alpha_1^k, \ldots, \alpha_n^k)$ может принимать лишь конечное число значений в зависимости от k. Значит, какие-то два таких набора (два упорядоченных) совпадут: $\alpha_i^k = \alpha_i^m$ при всех i, чего и хотелось.

Решения Младшей Лиги.

1. См. решение задачи 1 старшей лиги.

2. Ответ: выигрывает второй игрок. Вообще позиции, в которых начинающий проигрывает, — это в точности те натуральные числа n, десятичная запись которых оканчивается на нечетное число нулей.

Действительно, любой ход в такой позиции дает число, оканчивающееся на четное число нулей: ход-деление уменьшает число нулей на 1, а ход-вычитание приводит к числу с нулевым количеством нулей на конце.

С другой стороны, если число оканчивается на четное положительное число нулей, то делением получаем число с нечетным числом нулей на конце. Если же мы имели число, оканчивающееся не на 0, применяя разрешенные операции, мы можем занулить или отбросить последнюю цифру, и таким образом добиться нужной четности количества концевых нулей.

3. Ответ: $\angle ACD = 53°$. Продлим сторону AB за точку B и заметим, что смежный угол с углом BAD равен $180° - 62° - 59° = 59°$, то есть AD — внешняя биссектриса к треугольнику ABC в вершине A. К тому же BD — внутренняя биссектриса треугольника ABC, а, значит, D — центр вневписанной окружности, то есть CD — тоже внешняя биссектриса. Угол ACD равен $180° - 2 \cdot 22° - 62° = 74°$. Значит угол ACD равен $(180° - 74°)/2 = 53°$.

4. См. решение задачи 4 старшей лиги.

5. См. решение задачи 5 старшей лиги.

6. Пусть точки P_1, P_2, P_3 и P_4 лежат на окружности именно в таком порядке. Тогда заметим, что $\frac{1}{P_1P_3} \geqslant \frac{1}{d}$ и $\frac{1}{P_2P_4} \geqslant \frac{1}{d}$, где d — диаметр данной окружности. Далее, заметим, что

$$\frac{1}{P_1P_2} + \frac{1}{P_2P_3} + \frac{1}{P_3P_4} + \frac{1}{P_4P_1} \geqslant \frac{16}{P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_4 + P_4P_1} \geqslant \frac{16}{p},$$

где p — периметр вписанного в эту окружность квадрата. Первое из этих неравенств — это просто неравенство между средним гармоническим и средним арифметическим, второе же — это просто утверждение о том, что среди вписанных четырехугольников максимальный периметр имеет квадрат. Это утверждение может быть доказано многими способами (например, неравенством Йенсена для синусов). Мы просто воспользуемся утверждением о том, что серди вписанных в данную окружность треугольников с фиксированным основанием максимальный периметр имеет равнобедренный. Применяя это утверждение три четыре раза мы получим, требуемое.

Теперь заметим, что у квадрата в этом неравенстве достигается равенство, так что сумма $\frac{1}{P_1P_2} + \frac{1}{P_2P_3} + \frac{1}{P_3P_4} + \frac{1}{P_4P_1}$ как раз достигает минимального значения. При этом отрезки P_1P_3 и P_2P_4 как раз окажутся диаметрами.

7. Будем рассматривать морковку в новых единицах веса — 1 кг равен двум обычным килограммам. Тогда всего есть 90 кг овощей, нуждающихся в очистке, при это Петина скорость — независимо от вида чистящихся овощей — 2 кг в час. Вася же чистит картошку со скоростью 3 кг в час, а морковку — со скоростью 2,5 кг в час. Поэтому Вася будет чистить картошку, а Петя — морковку. Через 15 часов Вася почистит 45 кг картошки, а Петя — всю морковку. После этого они со скоростью 5 кг в час продолжат чистить оставшиеся 15 кг картошки и управятся за 3 часа. Таким образом, минимальное требующееся им время — 18 часов.

8. См. решение задачи 8 старшей лиги.