Двадцать Второй Российский Фестиваль юных математиков

Второй тур. Решения Старшей Лиги.

1. Ответ: 52. Пронумеруем все карты. Петя каждым ходом, если возможно, будет переворачивать две четные карты, чтоб они стали рубашкой вверх. Заметим, что когда то Петя не сможет так походить, так как он каждый раз рубашкой вверх делает две карты, а Вася каждый ход, переворачивает одну четную карту. Рассмотрим этот ход, у нас значит либо 50 либо 49 четных карт рубашкой вверх, тогда Петя перевернет карты так, чтобы стали все четные рубашкой вверх и хотя бы одна нечетное. Значит рубашкой вверх 51 карта точно есть, но не трудно заметить, что их всегда четное число, тогда есть 52 карты. Докажем, что Вася может не дать больше получить. Если перед ходом Васи карт рубашкой вверх больше 50, то есть какие-то две рядом, и их Вася перевернет, тогда такими операциями, если сначала делать, после хода Васи будет не более 50 рубашкой вверх, а тогда после хода Пети максимум 52.

2. Пусть плоскость разделила множество вершин основания на группы по a и b штук, где $a \geqslant b$. Тогда эта плоскость пересекает максимум $2b$ ребер основания и максимум a ребер идущих из вершины. Тогда количество ребер, которое она пересекает не превосходит $a + 2b$, что не больше 150. Пример строится из оценки.

Ответ: 150 ребер.

3. По неравенству о средних мы имеем $a^3+2 = a^3+1+1 \geqslant 3\sqrt[3]{a^3 \cdot 1 \cdot 1} = 3a$. Таким образом для доказательства неравенства достаточно показать, что

$$\frac{a^2+3a}{3a+6} + \frac{b^2+3b}{3b+6} + \frac{c^2+3c}{3c+6} + \frac{d^2+3d}{3d+6} \leqslant \frac{16}{9}.$$

Мы можем переписать это неравенство записать в другой форме

$$a+1-\frac{2}{a+2}+b+1-\frac{2}{b+2}+c+1-\frac{2}{c+2}+d+1-\frac{2}{d+2} \leqslant \frac{16}{3}$$

или $\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{d+2} \geqslant \frac{4}{3}$. Что следует из неравенства о средних:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{d+2}\right) \geqslant \frac{4}{(a+2)+(b+2)+(c+2)+(d+2)} = \frac{4}{4+2+2+2+2} = \frac{1}{3}.$$

4. Пусть $f = (a, b)$ найдем такие c и d, что $bc - ad = f$ (это линейной представление НОД, которое существует). Докажем, что при таких c и d числа $an + b$ и $cn + d$ взаимно просты.
Рассмотрим разность $\frac{b}{f}(an+c) - \frac{a}{f}(bn+d) = \frac{bc-ad}{f} = 1$, откуда получаем, что числа $an + c$ и $bn + d$ не могут иметь общих делителей.

5. Из условия следует, что лучи AB и DC пересекаются (обозначим точку их пересечения через E). Также лучи BC и AD пересекаются (обозначим точку их пересечения через F). Заметим, что тогда треугольник BKC равен треугольнику BEC, а треугольник CLD равен треугольнику CFD. Из этого следует, что прямые EC и FC — биссектрисы треугольника AEF. Значит и AC биссектриса угла BAD.

6. Пусть точка Q на луче AD такова, что $AQ = 2R$. Обозначим точку пересечения прямых I_aQ и AB через P. Заметим, что $AL = 2R$ равносильно тому, что $L = Q$, или, что тоже самое, $K = P$. А это уже равносильно тому, что $API_a = 90^\circ + 3\gamma/4$.

Пусть H и U — основания перпендикуляров из точки I_a на прямые AC и AQ соответственно. Так как I_a центр вневписанной окружности, то $AH = p$, а значит $AI_a^2 = p^2 + r_a^2$. Тогда $AU = r_a + h_a$ и $UI_a^2 = AI_a^2 - AU^2 = p^2 + r_a^2 - (r_a + h_a)^2$. Отсюда следует, что $UQ = |AU - AQ| = |r_a + h_a - 2R|$.

$$QI_a^2 = UI_a^2 + UQ^2 = p^2 + r_a^2 - (r_a + h_a)^2 + (r_a + h_a - 2R)^2 = r_a^2 + p^2 + 4R^2 - 4R(r_a + h_a)$$

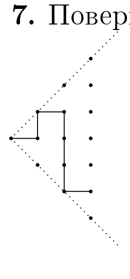
Из формулы Герона, а также формул $S = (p - a)r_a$, $4RS = abc$, $2S = ah_a$ следует, что $r_a^2 + p^2 = 4Rr_a + 2Rh_a$, а значит $QI_a^2 = 2R(2R - h_a)$.

Так как $QI_a^2 = QD \cdot QA = 2R(2R - h_a)$, то треугольники QI_aD и QAI_a подобны, и следовательно $\angle QI_aD = \angle QAI_a$.

Имеем $\angle I_aAD = \angle I_aAB - \angle I_aBD = \alpha/2 - (90^\circ - \beta) = \frac{\beta-\gamma}{2}$.

Следовательно $\angle QI_aD = \frac{\beta-\gamma}{2}$. $\angle QI_aA = \angle QI_aD + \angle AI_aD = (\alpha - \beta)/2 + \angle AI_aD$. Считая углы, получаем, что утверждение, что DI биссектриса угла AI_aB равносильно тому, что $\angle AI_aD = \gamma/4$, а это тоже самое, что и $\angle API_a = 90^\circ + 3\gamma/4$.

7. Повернем картинку на 45°:



Чтобы построить такую ломаную, мы сначала проводим из точки $(0,0)$ горизонтальный отрезок. Далее у нас выбор из трех вершин, лежащих на одной вертикали, чтобы провести вертикальное звено. Потом мы (однозначно) проводим еще горизонтальный отрезок. Для следующего вертикального отрезка мы имеем выбор из 5 вершин и т.д.

Ответ: количество ломаных равно $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}$.

8. Поставим на место номер 2011 число 0, на место номер 1 поставим число x, а на место номер 2 поставим число 2. На все остальные места от 3 до 2010 поставим числа от 3 до 2010. Докажем, что мы сможем подобрать такое целое x чтобы выполнялось условие задачи. Запишем условие на равенство суммы и суммы попарных произведений:

$$0 \cdot x + x \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + 2009 \cdot 2010 + 2010 \cdot 0 = x + 2 + 3 + 4 + \ldots + 2010$$

то есть $x = 2+3+4+\ldots+2010 - 2 \cdot 3 - 3 \cdot 4 - \ldots 2009 \cdot 2010$, очевидно, что это целое отрицательное число. Таким образом все поставленные числа различны и удовлетворяют нужному равенству.

9. Докажем, что через ребро uv проходит четное число гамильтоновых циклов. Рассмотрим новый граф G, в котором вершины соответствуют гамильтоновым путям исходного графа, начинающихся вершиной u и ребром uv. Если $\pi = uv \ldots tx$ — такой путь, и xp — ребро, ведущее из x не в u и не в t, то можно построить другой гамильтонов путь, содержащий ребро xp и не содержащий подходящего ребра pw из первого пути (а в остальном содержащим те же ребра, что π). Вот такие два пути, получающиеся друг из друга описанной заменой, и соединим ребром в графе G. Какова степень пути π в этом графе? Она равна количеству ребер исходного графа, ведущих из x не в u и не в t. То есть четна, если x и u не смежны и нечетна, если смежны. Но тогда получается, что вершин нечетной степени в G ровно столько же, сколько гамильтоновых циклов в исходном графе, содержащих uv. Откуда и вытекает требуемое.

10. Нам понадобится известная лемма: если многочлен $g(x)$ степени не выше k принимает целые значения в $k+1$ последовательной целой точке, то он принимает целые значения во всех целых точках. Лемма доказывается индукцией по k: база $k=0$ очевидна, для перехода достаточно применить индукционное предположение к многочлену $g(x+1)-g(x)$ и $k-1$ вместо k.

Применяя лемму к многочлену $h(x) = (f(x)-f(0))/x$ и $k = n-1$ (по условию $h(x)$ целое для $x = 1, 2, \ldots, n$) получаем, что $h(x)$ целое при всех целых x.

Решаем задачу индукцией по n. База $n=1$ понятна. Переход от $n-1$ к n. Рассмотрим новый многочлен $f_1(x) = f(x+1) - f(x)$. Он имеет степень $n-1$ и, как легко видеть, удовлетворяет условию для $n-1$ вместо n. Положим $P(x,y) = (f(x)-f(y))/(x-y)$. Индукционное предположение для многочлена f_1 говорит нам, что $P(a+1,b+1) - P(a,b)$ целое для различных целых a,b. Отсюда по индукции сразу следует, что все выражения $P(a+k, b+k)$ с целыми k попарно сравнимы по модулю 1 (то есть их разности целые). Среди таких выражений есть и $P(a-b, 0) = h(a-b)$, которое, как мы знаем, целое. Значит, и $P(a,b)$ целое, что и требовалось.

Решения Младшей Лиги.

1. См. решение задачи 1 старшей лиги.

2. 97 диагоналей 100-угольника разбивает его на 98 треугольников. В каждом из треугольников есть непересеченная сторона, однако, некоторые такие стороны могут “обслуживать” два треугольника. Значит всего непересеченных отрезков не меньше, чем $98/2 = 49$, пересеченных, стало быть, не больше, чем $100 + 97 - 49 = 148$. Такое возможно, если прямая пересекает все стороны n-угольника (такой пример хорошо известен), а триангуляция устроена так, что любому треугольнику разбиения принадлежит хоть одна сторона 100-угольника. Можно видеть, что этого удается добиться.

3. Заметим, что $\frac{a^2-b^2}{c} = \frac{a+b}{c} \cdot (a-b) \geqslant 2(a-b)$. Так же заметим, что $\frac{c^2-b^2}{a} = \frac{c+b}{a} \cdot (c-b) \geqslant 2(c-b)$ (здесь важно отметить, что $c - b \leqslant 0$). Наконец, имеем $\frac{a^2-c^2}{b} = \frac{a+c}{b} \cdot (a-c) \geqslant a-c$. Складывая эти три неравенства, получаем требуемое.

4. См. решение задачи 4 старшей лиги.

5. См. решение задачи 5 старшей лиги.

6. Пусть серединный перпендикуляр к OH пересек сторону AB в точке X и сторону BC в точке Y. Отразим H симметрично относительно стороны AB и получим точку H_C, лежащую, как известно, на описанной окружности. Тогда ясно, что $2OX = OX + XH = OX + XH_C \geqslant R$. Аналогично получаем, что $2OY \geqslant R$. Таким образом $2OX + 2OY \geqslant R + R = 2R$, откуда следует требуемое.

7. См. решение задачи 7 старшей лиги.

8. См. решение задачи 8 старшей лиги.