Двадцать Второй Российский Фестиваль юных математиков

Третий тур. Решения Старшей Лиги.

1. Пусть не так, то есть многочлен раскладывается $f(x^k) = g(x)r(x)$. У $f(x)$ оба корня комплексные, значит модуль каждого равен $\sqrt{2011!}$. Тогда у $f(x^k)$ модуль каждого корня равен $\sqrt[2k]{2011!}$. Значит по тереме Виета $|g(0)| = (2011!)^{\frac{\deg(g)}{2k}}$. Мы знаем, что $g(0)$ целое и $\deg(g) < 2k$, но это не возможно так как 2011 простое и входит в 2011! в первой степени.

2. Индукция по n. База $n = 1$ очевидна. Переход от $1, \ldots, n-1$ к n. Будем говорить, что множества A, B из условия разделяют a и b, а систему подмножеств, как в условии, назовем разделяющей. Заметим, что если $M_1 \subset M$ — множество мощности $|M_1| =: m < n$, для разделения элементов которого используются в совокупности s выбранных подмножеств, то по индукционном предположению $3^s \geqslant m^3$ (поскольку пересечения этих s подмножеств с M_1 образуют в M_1 разделяющую систему). Рассмотрим граф, вершины которого суть наши k подмножеств, а ребрами соединяются непересекающиеся подмножества. Изолированные вершины сразу выкинем: они не помогают разделять элементы. Рассмотрим несколько случаев.

1) В графе есть вершина A, смежная только с одной вершиной B. Заметим, что для разделения элементов B не используются ни A, ни B. Кроме того, для разделения элементов $M \setminus B$ не используются ни A, ни B. Одно из множеств $B, M \setminus B$ имеет не менее $n/2$ элементов, так что $3^{k-2} \geqslant (n/2)^3$, откуда $3^k > n^3$.

2) В графе есть вершина A степени хотя бы 3. Аналогично пункту 1 получаем, что $3^{k-1} \geqslant |M \setminus A|^3$, $3^{k-4} \geqslant |A|^3$. Извлекая кубические корни получаем, что $n = |A| + |M \setminus A| \leqslant 3^{(k-1)/3} + 3^{(k-4)/3} < 3^{k/3}$, что и требовалось.

3) В нашем графе все вершины имеют степень 2. Пусть A — выбранное подмножество максимальной мощности, B и C — те подмножества, с которыми A не пересекается. Заметим, что для отделения элементов A не используются множества A, B, C, для отделения элементов $M \setminus (B \cup C)$ они тоже не используются. Либо $|A| \geqslant n/3$, либо $|A| \leqslant n/3$, либо $|M \setminus (B \cup C)| \geqslant n - |B| - |C| \geqslant n - 2|A| \geqslant n/3$. В обоих случаях получаем, что $3^{k-3} \geqslant (n/3)^3$, что и требовалось.

3. Обозначим половину угла ABC через β. Тогда т.к. $AP \parallel BK$, то $\angle PAC = \beta$. Т.к. $AK \parallel PL$, то $\angle PLA = \angle LAK = \beta$. С другой стороны из условия $\angle ALC_1 = 2\beta$, поэтому $\angle PLC_1 = \beta$. Т.к. $\angle PAC_1 = \angle PLC_1$, то точки $APLK$ лежат на одной окружности. Тогда $\angle PC_1A = \angle PLA = \beta$, следовательно $PC_1 = AP = LK$. Аналогично $QA_1 = LK$.

4. Лемма. *Если у двух четырехугольников соответственно равны стороны и суммы противоположных углов, то они равны.*

Доказательство леммы. Предположив противное, обозначим два не равных четырехугольника через $KLMN$ и $K'L'M'N'$ соответственно. Ясно, что $LN \neq L'N'$. Не умаляя общности предположим, что $LN < L'N'$. Тогда $\angle LKN < \angle L'K'N'$ и $\angle LMN < \angle L'M'N'$, но тогда $\angle LKN + \angle LMN < \angle L'K'N' + \angle L'M'N'$, противоречие.

Обозначим стороны AB, BC, CD и DA четырехугольника через a, b, c и d соответственно. Тогда после первой операции стороны четырехугольника будут равны b, a, c, d; после второй — b, c, a, d; после третьей — c, b, a, d; после четвертой — c, a, b, d; после пятой — a, c, b, d; после шестой — a, b, c, d. Также заметим, что при каждой операции какие-то два противоположных угла не изменяются, а значит их сумма не меняется. Следовательно по лемме после шестой операции получится исходный четырехугольник.

5. Лемма. *Если в компании n мужчин и n женщин каждый симпатизирует хотя бы $n/2$ представителям противоположного пола, то их можно переженить согласно симпатиям.*

Доказательство леммы. Будем женить, пока это возможно. Пусть мы образовали $k < n$ счастливых пар, а больше не выходит. Рассмотрим холостого юношу Василия и незамужнюю девушку Марию. Они симпатизируют только замужним женщинам и женатым мужчинам соответственно (иначе бы можно было добавить пару), причем каждый более чем половине. Тогда найдется супружеская пара, скажем Геннадий и Елена, такая, что Василий симпатизирует Елене, а Мария — Геннадию. Извинимся перед Геннадием и Еленой и образуем два новых брака. Так мы увеличим количество супружеских пар. Продолжая, переженим всех.

Применим лемму к представителям двух марсианских полов. Назовем полученные пары женщинами, а представителей третьего пола мужчинами. Будем считать, что мужчина симпатизирует женщине, если он симпатизирует обоим образующим ее марсианам. Заметим, что условие леммы снова выполняется, так что достаточно ее применить еще раз.

6. Ответ: Можно. Рассмотрим пятые степени чисел от 1 до 2010 по модулю 2011. Заметим во-первых, что каждое значение a пятой степени встречается не более 5 раз, потому что уравнение $x^5 - a = 0$ имеет по модулю 2011 не более пяти корней. Отсюда получаем, что различных пятых степеней хотя бы 402. С другой стороны, каждая такая пятая степень $a = b^5$ удовлетворяет уравнению $a^{402} = b^{2010} = 1$ (все равенства и уравнения далее — по модулю 2011). Значит, пятых степеней, как корней уравнения $x^{402} - 1 = 0$, не более 402. Следовательно, их ровно 402 и каждая пятая степень a имеет пять корней пятой степени по модулю 2011, каковые корни суть корни уравнения $x^5 - a = 0$, так что по теореме Виета их сумма равна нулю. Итак, разбиение на пятерки с одинаковым значением пятой степени — искомое.

7. Ответ: $f(x) = 0$ или $f(x) = \sqrt{x}$. Заметим, что если $z > y$ то существует такое положительное x такое, что $x^2 + y + xf(4y) = z$ это следует из монотонности левой части по равенства по переменной x при неотрицательном x. Тогда $f(z) = f(y) + f(x^2)$ таким образом функция f не убывает.

Перепишем равенство в другом виде $f(x) + f(y) = f(x + y + \sqrt{x}f(4y)) \quad (\star)$

Пусть $f(x_0) = 0$ подставим $x = y = x_0$ в $(\star)$: $0 = f(x_0) + f(x_0) = f(x_0 + x_0 + x_0 f(4x_0)) \geqslant f(2x_0)$, откуда из неотрицательности $f(2x_0)$ оно равно 0. Таким образом $f(2^l x_0) = 0$ для любого l, откуда из монотонности следует что $f(x) \equiv 0$. Таким образом функция либо тождественный 0, либо строго монотонна.

Из равенства $(\star)$ следует, что $f(x+y+\sqrt{x}f(4y)) = f(x+y) = f(y+x+\sqrt{y}f(4x))$, откуда из строгой монотонности получаем, что $\sqrt{x}f(4y) = \sqrt{y}f(4x)$ и $f(x) = c\sqrt{x}$. Если подставить это в исходное равенство легко видеть, что тогда $c = 1$ или 0, что дает ответ.

8. Пусть $S = a + b + c$, $x = a/S$, $y = b/S$ и $z = y/S$. Тогда наше неравенство имеет вид:

$$S^3(x^2y + y^2z + z^2x + 15xyz) + 3S \geqslant 11S^2(xy + yz + zx)$$

Поделим на S^2 и будем доказывать такие два неравенства:

$$S(x^2y + y^2z + z^2x + 15xyz) + \frac{3}{S} \geqslant (x^2y + y^2z + z^2x + 15xyz) + 3 \geqslant 11(xy + yz + zx)$$

Сначала докажем первое. Пусть $T = x^2y + y^2z + z^2x + 15xyz$, нам надо доказать, что $ST + \frac{3}{S} \geqslant T + 3$(это верно так как $T < 3$ и $S \leqslant 1$).

Теперь надо доказать второе. Сделаем неравенство однородным:

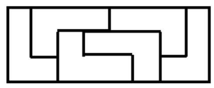
$$(x^2y + y^2z + z^2x + 15xyz) + 3(x + y + z)^3 \geqslant 11(xy + yz + zx)(x + y + z)$$

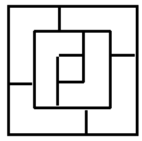
Сократим подобные слагаемые и получим $3(x^3+y^3+z^3) \geqslant (x^2y+y^2z+z^2x)+2(xy^2+yz^2+zx^2)$, а это неравенство следует из неравенства $x^3 + 2y^3 = x^3 + y^3 + y^3 \geqslant 3xy^2$ и аналогичных ему.

9. Ответ: открытая дуга AB описанной окружности треугольника ABC; либо, если точки A, B, C лежат на одной прямой, подмножество той же прямой: если C лежит между A и B, то дополнение до прямой отрезка AB, иначе интервал AB.

Исследуем четверку $ABCD$ на цепляемость. Прежде всего заметим, что если точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости, то окружности ω_1, ω_2 можно выбрать в параллельных плоскостях и они не будут зацеплены. Если они лежат в одной плоскости (скажем, горизонтальной) и отрезки AB, CD не имеют общих точек. Рассмотрим вертикальные (перпендикулярные горизонтальной) плоскости через прямые AB и CD. Расположим в них окружности, ω_1 почти полностью ниже горизонтали, ω_2 почти полностью выше. Они не будут зацеплены. Если, например, отрезок AB — часть отрезка CD, то легко построить непересекающиеся окружности ω_1, ω_2 даже на плоскости. Если A, B, C, D лежат на одной прямой в порядке, например, $ACBD$, то ясно, что такая четверка цепляющая. Пусть точки $ABCD$ не лежат на одной прямой, и отрезки AB и CD пересекаются в точке O (возможно, например, что $O = C$). Предположим, что точки A, B, C, D не лежат на одной окружности. Тогда не умаляя общности $\angle ADB + \angle ACB > \pi$. Рассмотрим описанную окружность ω треугольника ABD, точка C лежит внутри нее. Сгомотетируем ω относительно D так, чтобы она прошла через C. Это будет окружность ω_2, а окружность ω_1 — немного сдвинутая так, чтобы точка D лежала внутри, ω. Наконец, докажем, что если AB и CD — пересекающиеся хорды одной окружности, то четверка $ABCD$ — цепляющая. Рассмотрим окружности ω_1 и ω_2. Если они лежат в плоскости $ABCD$, то, как легко видеть из рассмотрения этих окружностей и окружности $ABCD$, пересекаются. Пусть плоскости окружностей ω_1 и ω_2 пересекаются по прямой $\ell \ni O$. Если окружность ω_1 пересекает ℓ в точках P_1, Q_1, а ω_2 — в P_2, Q_2, то по теореме о степени точки имеем $OP_1 \cdot OQ_1 = OA \cdot OB = OC \cdot OD = OP_2 \cdot OQ_2$, откуда отрезки P_1Q_1 и P_2Q_2 “зацеплены” на прямой ℓ, что и означает зацепленность окружностей ω_1, ω_2.

10. Ответ: $\frac{103^2-1}{4}$. Разрежем наш квадрат 103×103 на 4 прямоугольника 49×54 и центральный квадрат 5×5. Прямоугольник 3×8 можно разрезать на L–тетрамино, тогда 40×54 и 9×54 можно, а значит и 49×54 можно разрезать. А квадрат 5×5 можно без одной клетки разрезать.





Решения Младшей Лиги.

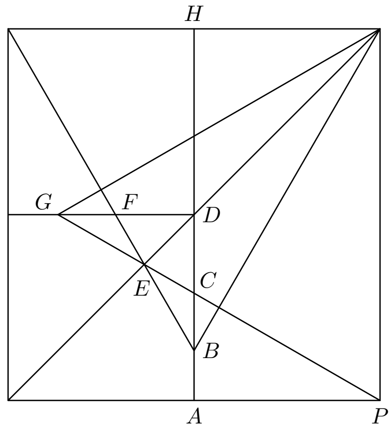
1. Ответ: Костя ошибается. Возьмем какое-либо число с большими цифрами, делящееся на 143, например, $858858\ldots858$. Если для него признак делимости верен, то по этому признаку число, получающееся из рассматриваемого перестановкой двух последних цифр, тоже делится на 143. Но это, очевидно, неверно, потому что разность этих чисел равна 27 и на 143 не делится.

2. Ответ: можно. Данное в условии множество обозначим через S. Запишем все числа из нашего множества S в троичной системе счисления. Поскольку $3^7 = 2187 > 2011$, все числа из S будут не более чем семизначные. Рассмотрим 21 множество:

$$A_k = \{m \in S : k\text{-я цифра в записи } m \text{ равна } 0\},$$
$$B_k = \{m \in S : k\text{-я цифра в записи } m \text{ равна } 1\},$$
$$C_k = \{m \in S : k\text{-я цифра в записи } m \text{ равна } 2\}, \quad k = 1, \ldots, 7.$$

Если два числа различаются в ℓ-м разряде, для них всегда можно выбрать два подходящих различающих множества из A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ.

3. См. решение задачи 3 старшей лиги.



4. Рассмотрим четверть центральной части — четырехугольник $CDFE$. Обозначим его площадь через $2S$, тогда S — площадь треугольника CDE. Подсчитаем длины отрезков на картинке:
$AD = \frac{1}{2}$;
$BH = \frac{\sqrt{3}}{2}$ — высота правильного треугольника;
$AB = 1 - BH = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$;
$AC = AP \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{6}$ — из треугольника APC.
Тогда

$$\frac{BC}{CD} = \frac{AC - AB}{AD - AC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6} - (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}} = \frac{4\sqrt{3} - 6}{3 - \sqrt{3}}.$$

Треугольники CDE и BCE имеют общую высоту, следовательно, $S_{BCE} = \frac{BC}{CD} S$,

$$S_{BDF} = 2S + S_{BCE} = \left(2 + \frac{4\sqrt{3} - 6}{3 - \sqrt{3}}\right) S = \frac{2\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} S.$$

С другой стороны,

$$S_{BDF} = \frac{1}{2} FD \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot BD = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{3} - 3}{12}.$$

Получаем уравнение $\frac{2\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} S = \frac{2\sqrt{3}-3}{12}$, откуда $S = \frac{2\sqrt{3}-3}{12} \cdot \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{9-5\sqrt{3}}{24}$. Итого: искомая площадь равна $8S = 3 - \frac{5}{3}\sqrt{3}$.

5. Будем решать задачу на языке ориентированных графов. Пусть одно из имеющихся уже ребер ведет из A и B. Рассмотрим все ориентированные пути в оставшемся графе идущие из B в A. Их 18!, так как можно просто последовательно выбирать следующую вершину. Теперь рассмотрим любое другое ребро и посмотрим, сколько из имеющихся путей оно "портит". Пусть это ребро CD (C или D могут совпадать с A или B). "Стянем" это ребров в вершину, и в получившемся графе будет ровно 17! ориентированных путей из B в A. Одна из вершин в рассматриваемом пути — это ребро CD, которое либо встраивается в имеющий путь либо одним, либо двумя способами, но при этом оказывается направленным "не в ту сторону" не более одного раза. Таким образом, каждое ребро портит не более 17! путей, а 17 оставшихся ребер испортят не более $17 \cdot 17!$ путей, что меньше 18!. Значит найдется не испорченный путь, дополним его ребрами, чтобы вместе с ребром AB образовался цикл, проходящий по всем вершинам. Возможно, при мы добавили меньше 19 ребер, тогда оставшиеся ребра добавим как угодно, что, очевидно, возможно. Таким образом будет получен связный граф.

6. Ответ: 60 км. Пусть $2x$ — расстояние от A до B. Приравняем отношения скоростей первого туриста и второго в два указанный момента. Так как отношение скоростей равно отношение пройденных в этот момент путей, мы имеем: $\frac{x}{2x-40} = \frac{2x-15}{x}$. Отсюда имеем уравнение $x^2 = (2x - 15)(2x - 40) = 4x^2 - 110x + 600$, то есть $3x^2 - 110x + 600 = 0$. Его корни — это $20/3$ и 30, откуда путь от A до B — либо $40/3$, либо 60. Первый вариант не возможен, так как $40/3 < 40$. Отсюда ответ: 60 км.

7. Ответ: $n = 1$ или $n = 2$. Заметим, что $a_1 = n$, так как все числа делятся на 1, и что все $a_k \leqslant n$. Составим таблицу $n \times n$, где на пересечении k-ой строчки и m-го столбца поставим 1, если a_m делится на k, и 0 — в противном случае. Заметим, что число единиц в k-ой строчке, это и есть a_k, откуда ясно, что сумма всех числе в таблице равна сумме $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. С другой стороны, в каждом столбце стоит количество натуральных делителей a_k, что меньше, чем a_k, если $a_k \geqslant 3$. Значит, если среди чисел a_k есть число, большее 2, то сумма всех чисел в таблице меньше, чем сумма $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, что невозможно. Значит, все a_k — это 1 или 2, откуда $a_1 = 1$ и $a_1 = 2$, то есть $n = 1$ или 2. Примерами являются последовательности 1 и 2, 1.

8. Заметим, что по неравенству о средних $3 = ab + bc + ac \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$, откуда $abc \leqslant 1$. Тогда имеем: $1 + a^2(b + c) = 1 + a(ab + ac) = 1 + a(3 - bc) = 3a + (1 - abc) \geqslant 3a$. Отсюда $\frac{1}{1+a^2(b+c)} \leqslant \frac{1}{3a}$. Складывая три таких неравенства, имеем

$$\frac{1}{1 + a^2(b + c)} + \frac{1}{1 + b^2(a + c)} + \frac{1}{1 + c^2(a + b)} \leqslant \frac{1}{3a} + \frac{1}{3b} + \frac{1}{3c} = \frac{ab + bc + ac}{3abc} = \frac{1}{abc},$$

что и требовалось.