Двадцать Второй Российский Фестиваль юных математиков

Четвертый тур. Решения Старшей Лиги.

1. Надо доказать, что если два графа G_1, G_2 на n вершинах с $m > n(n-1)/4$ ребрами имеют одинаковые наборы подграфов с удаленными ребрами, то они изоморфны. Во-первых заметим, что для каждого собственного подграфа H в G_1 (подграф — то, что получается удалением нескольких ребер, собственный — значит удалением хотя бы одного ребра) количества таких подграфов в G_1 и в G_2 совпадают. В самом деле, если выписать все подграфы всех графов с удаленными ребрами, то каждая копия H в G_1 встретится $m - |E(H)|$ раз, откуда мы и надем число копий. Пусть G, H — два графа с n вершинами. Посчитаем число мономорфизмов из G в H по формуле включений и исключений (мономорфизм — взаимно однозначное отображение между вершинами, при котором смежные вершины переходят в смежные). Получаем формулу

$$|G \to H| = \sum_{X \subset G} (-1)^{|E(X)|} |X \to \bar{H}|,$$

где $\bar{H}$ — дополнительный граф для H, X пробегает все графы с теми же вершинами, что G такие, что $E(X) \subset E(G)$. Действительно, мы берем все отображения (для $E(X) = \emptyset$), вычитаем те, которые некоторые ребра отправляют в $\bar{H}$, потом прибавляем те, для которых два ребра отправляются в $\bar{H}$ и так далее). Напишем эту формулу для $H = G_2$, $G = G_1$ или $G = G_2$. В силу нашего наблюдения слагаемые, соответствующие подграфам, отличным от G_1, G_2, совпадают. Но графы G_1, G_2 никак не отобразить в $\bar{H}$ в силу большого количества ребер.

2. Заметим, что так как A_j, B_j и C_j разбиения M, то $|M| = |M \cap M| = \sum |A_i \cap B_j|$ и еще два аналогичных равенства. Теперь просуммируем наше неравенство по всем i, j, k и получим: $36|M| = 12|M| + 12|M| + 12|M| \geqslant 12^4$. Значит $|M| \geqslant 576$. Построим пример. Возьмем в качестве M квадрат 12×12, в каждой клетки которого 4 элемента. Разбиение A и B соответствует, разбиению на столбцы и строки, а C на обобщенные диагонали.

Пример 2. Рассмотрим все тройки (x, y, z), где $0 \leqslant x,\ y,\ z \leqslant 11$ и $(x + y + z) \vdots 3$. В качестве A_i все тройки у которых $x = i$, B_i и C_i аналогично.

3. Будем писать что многочлены $A(x) \equiv B(x)$ если их разность представляется в виде $(x^p - x + 1)f(x) + pg(x)$ для некоторых многочленов с целыми коэффициентами f и g.

Пусть p — нечетное простое. Заметим, что $x \equiv x$, $x^p \equiv x - 1$ (все биномиальные коэффициенты кроме крайних кратны p), $x^{p^2} \equiv (x-1)^p \equiv x^p - 1 \equiv x - 2$ и далее по индукции $x^{p^k} \equiv (x^{p^{k-1}})^p \equiv (x - k + 1)^p \equiv x^p - (k-1)^p \equiv x^p - k + 1 \equiv x - k$. Таким образом $x^{p^k} \equiv x - k$. Тогда перемножим все такие сравнения от 1 до $k = p - 1$:

$$x^{1 + p + p^2 + \dots p^{p-1}} \equiv x(x-1)(x-2)\dots(x-(p-1)) \equiv x^p - x \equiv -1,$$

среднее сравнение следует из теоремы Виета. Тогда $x^{2(1 + p + p^2 + \dots p^{p-1})} \equiv 1$. Если $n = p^p - 1$ наименьшее натуральное число для которого $x^n \equiv 1$, то $p^p - 1 \leqslant 2(1 + p + p^2 + \ldots + p^{p-1}) = 2\frac{p^p - 1}{p - 1}$, откуда $p - 1 \leqslant 2$, то есть $p = 2$ или $p = 3$.

Не очень сложно проверить, что $p = 2$ или $p = 3$ подходят.

4. Это очень интересная задача, если нарисовать картинку становится чуть–чуть проще.

5. Ответ: Для нечетных n. Сначала докажем, что для четных нельзя. Пусть арифметическая последовательность возрастает, тогда $a_1 a_2 < a_2 a_3 < \ldots < a_n a_1$, но произведение чисел на нечетных местах равно произведению начетных, а это невозможно. Пример для нечетных возьмем арифметическую прогрессию, где произведение всех чисел точный квадрат, эта последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Заметим, что $a_1^2 = \frac{b_n b_1 b_{n-2} b_3 \dots}{b_{n-1} b_2 \dots}$. Так как произведение всех b_i точный квадрат, то a_1 будет рациональным, аналогично вычислим все a_j. А теперь домножим все a_j на какой то X, чтобы они стали натуральными.

6. $\ln(1 + \frac{1}{2n+1}) = \ln(1 + \frac{1}{n}) - \ln(1 + \frac{1}{2n})$. Отсюда получим

$$\ln(1 + \frac{1}{n}) \ln(1 + \frac{1}{2n}) \ln(1 + \frac{1}{2n+1}) = \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})^3 - \ln(1 + \frac{1}{2n+1})^3 - \ln(1 + \frac{1}{2n})^3}{3}$$

. Теперь просуммируем наше выражение не для N, а до бесконечности. Там почти все сократится и останется только $\frac{1}{3}(\ln(2))^3$.

7. Пусть касательные в точках C и D пересекаются в P. Тогда P — радикальный центр трех окружностей, то есть $P \in AB$. Прямые CD и NM суть поляры точек P, A относительно ω_1. Если $K = CD \cap MN$, то поляра K, выходит, есть прямая ABP, следовательно, $CM \cap ND \in AB$.

8. Во-первых, заметим, что при всех $n > 1$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos\Bigl(\frac{2\pi k}{n}\Bigr) = 0\,. \qquad (1)$$

Чтобы не увязнуть в обозначениях, проведем рассуждение на примере конкретного n, скажем, $n = 2010$. Итак, мы ищем сумму $S = \cos\Bigl(\dfrac{2\pi}{2010}\Bigr) + 2\cos\Bigl(\dfrac{2\pi\cdot 2}{2010}\Bigr) + 3\cos\Bigl(\dfrac{2\pi\cdot 3}{2010}\Bigr) + 2\cos\Bigl(\dfrac{2\pi\cdot 4}{2010}\Bigr) + 5\cos\Bigl(\dfrac{2\pi\cdot 5}{2010}\Bigr) + \ldots$ Попытаемся записать ее как линейную комбинацию нескольких сумм вида (1):

$$S = \sum_{\ell=1}^{2010} \cos\Bigl(\frac{2\pi\ell}{2010}\Bigr) + \sum_{\ell=1}^{1005} \cos\Bigl(\frac{2\pi\cdot 2\ell}{2010}\Bigr) + 2\sum_{\ell=1}^{670} \cos\Bigl(\frac{2\pi\cdot 3\ell}{2010}\Bigr) + 4\sum_{\ell=1}^{402} \cos\Bigl(\frac{2\pi\cdot 5\ell}{2010}\Bigr) + \ldots$$

Коэффициенты, которые возникают в этом разложении, — 1, 1, 2, 4, …— это значения функции Эйлера на делителях числа n: $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, $\varphi(3)$, $\varphi(5)$, …. Иначе говоря, мы утверждаем, что

$$S = \sum_{d|2010} \varphi(d) \sum_{\ell=1}^{2010/d} \cos\Bigl(\frac{2\pi\cdot d\ell}{2010}\Bigr). \qquad (2)$$

Действительно, преобразуем правую часть формулы (2) к исходному виду суммы S. Каждую дробь $\frac{k}{2010}$ можно записать в виде $\frac{d\ell}{2010}$, где d — общий делитель k и 2010, последнее означает, что d — делитель НОД$(k, 2010)$. Тогда если собрать в сумме (2) все слагаемые, содержащие $\cos\bigl(\frac{2\pi k}{2010}\bigr)$, то сумма окажется записанной в виде

$$S = \sum_{k=1}^{2010} \Biggl(\sum_{d|\text{нод}(k,2010)} \varphi(d)\Biggr) \cos\Bigl(\frac{2\pi\cdot k}{2010}\Bigr).$$

Выражение в скобках равно НОД$(k, 2010)$ в силу тождества Гаусса $\sum\limits_{d|n} \varphi(d) = n$. (Оно почти очевидно: выпишем n дробей $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, …, $\frac{n}{n}$ и запишем каждую в нескоратимом виде. Получатся дроби, у которых знаменатели — это делители n, причем дробей со наменателем k будет ровно $\varphi(k)$ штук.)

Для завершения решения, осталось заметить, что при $d < 2010$ внутренняя сумма в формуле (2) равна 0 в силу равенства (1), а при $d = 2010$ внутренняя сумма содержит всего одно слагаемое, равное 1, откуда $S = \varphi(2010)$.

9. Ответ: при $c = 1/4$ Петя может угадать Васино число, при $c > 1/4$ уже не может. Сначала покажем, как действовать Пете при $c = 1/4$. Про каждое из $2^M - 2$ непустых и не полных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, M\}$ Петя спросит, лежит ли в нем задуманное число. Предположим, что Васины ответы могли бы быть даны для двух различных задуманных чисел a, b. Для каждого из 2^{M-1} множеств, содержащих ровно одно из чисел a, b, Васин ответ будет для одного из чисел неверным, а тогда для одного из чисел a, b неверных ответов хотя бы $2^{M-2} > (2^M - 2)/4$, противоречие. Докажем, что при $c > 1/4$ и достаточно большом M Вася всегда может запутать Петю. Пусть M таково, что $M^2/4 < cM(M-1)$. Получив Петины вопросы, Вася для каждого из способов задумать число найдет правильный ответ и рассмотрим пары чисел, для которых ответы различны. Их будет не больше, чем $M^2/4$. Таким образом, всего таких пар будет не больше, чем $nM^2/4 < cnM(M-1)$, так что какая-то пара (a, b) встретится меньше, чем $2cn$ раз. Для этой пары в (примерно) половине случаев даем ответ, правильный для a, а в другой половине — правильный для b (либо правильный для обоих). Получив такие ответы, Петя не сможет угадать наверняка, задумал Вася a или b.

10. Лемма. Для n различных вещественных чисел их суммы по три принимают хотя бы $3n - 8$ различных значений. Доказательство. Индукция по n, база $n = 3$ очевидна. Переход: если $a > b > c > d$ — три самых больших числа, то суммы $a+b+c, a+b+d, a+c+d$ не встречаются среди сумм чисел, кроме a.

Из леммы следует то же про различные вектора на плоскости. Действительно, их проекции на некоторую ось все различны.

Пусть теперь A_1, …, A_{1000} — наши точки. Расставим в три из них массы -1, а в остальные +1 и рассмотрим центр масс. Заметим, что любая прямая, проходящая через эту точку, хорошая (сумма расстояний со знаками будет равна 0, так

$$\sum \varepsilon_i f(A_i) = 994 f\left(\frac{1}{994}\sum \varepsilon_i A_i\right) = 0,$$

где $\{\varepsilon_i\}$ — набор из трех “-1” и 997 “+1”, функция f — линейная функция расстояния со знаком до прямой через центр масс). Как мы выяснили, среди наших центров масс хотя бы 2992 различных, а значит, через любую точку, отличную от точек прямых, соединяющих их, проходит хотя бы 2992 хорошие прямые.

Четвертый тур. Решения Старшей Лиги’.

задачи 1–8 см. решения младшей лиги; 9,10 — старшей.

Четвертый тур. Решения Младшей Лиги.

1. Предположим, что другой Костя провел меньше 1000 ребер. Покажем, что тогда граф можно покрасить в 109 цветов. Можно считать, что оба исходных графа G_1 и G_2 — это полные графы на 100 вершинах. Найдем в компоненте G_1 вершину степени меньше 109. Такая вершина обязательно найдется, поскольку в противном случае из каждой вершины компоненты G_1 внутрь компоненты выходит не более 99 ребер, а тогда наружу (т.е. в компоненту G_2) — не менее 10 ребер, и тогда количество ребер между компонентами не меньше 1000. Обозначим найденную вершину V_{100} и удалим ее из графа вместе со всеми ребрами.

Дальше мы будем аналогично искать в компоненте G_1 вершины V_{99}, V_{98} и т.д. степени меньше 109 и последовательно удалять их из графа. Опишем этот процесс чуть подробнее. Если вершины $V_{99}, \ldots, V_{k+1}$ уже удалены, то какая-то из оставшихся вершин в компоненте G_1 должна иметь степень меньше 109. Действительно, из каждой вершины G_1 внутрь компоненты G_1 выходит $k-1$ ребер. Если степень каждой из оставшихся вершин не меньше 109, то наружу из каждой вершины выходит не меньше $110-k$ ребер, и всего между компонентами проведено не меньше $k(110-k)$ ребер, что при $k \geqslant 10$ не меньше 1000. (Для $k \leqslant 9$ возможность выбора нужной вершины очевидна.)

Итак, с помощью описанного процесса мы сможем пронумеровать все вершины в компоненте G_1. Теперь построим раскраску в 109 цветов: последовательно возвращая в наш граф вершины $V_1, \ldots, V_{100}$, мы будем красить каждую из них в подходящий цвет, отличный от цвета соседей, имеющихся у вершины в момент ее возвращения.

2. см. решение задачи 2 из старшей лиги.

3. Ответ: можно. Будем делать это последовательно. Пусть нам удалось выписать несколько натуральных чисел, и пусть последнее число в ряду — это a, а наименьшее невыписанное число — это b. Тогда продолжим наш ряд числами kab и b, где натуральное k подберем так, чтобы число kab было больше все уже выписанных чисел. Таким образом нам удалось добавить в последовательность очередное натуральное число.

4. Обозначим середину отрезка BC через L, а середину O_1O_2 через K. заметим, что $AL \perp O_1O_2$, так как A и L лежат на радикальной оси этих окружностей. Заметим также, что $LK \| O_1B \| O_1C$, а значит $LK \perp BC$. Отсюда следует, что $AFKL$ — параллелограмм, откуда $AF = KL = \frac{O_1B+O_2C}{2} = \frac{O_1A+O_2A}{2} = \frac{1}{2}O_1O_2$, что и требовалось.

5. Индукция по n. База $n=3$: $5!! = 3 \cdot 5 \equiv -1 \pmod{16}$.

Индукционный переход от $n-1$ к n. Запишем $(2^n-3)!!$ в виде следующего произведения:

$$(2^n-3)!! = \prod_{k=0}^{2^{n-2}-2} \left(2^{n-1}-(2k+1)\right) \cdot \prod_{k=0}^{2^{n-2}-2} \left(2^{n-1}+(2k+1)\right)$$

(в первом произведении перечислены нечетные сомножители от 1 до $2^{n-1}-1$, а во втором — от $2^{n-1}+1$ до 2^n-3). Тогда

$$(2^n-3)!! = \prod_{k=0}^{2^{n-2}-2} \left(2^{2(n-1)}-(2k+1)^2\right) \equiv \prod_{k=0}^{2^{n-2}-2} \left(2^{2(n-1)}-(2k+1)^2\right) \equiv -(2^n-3)!!^2 \pmod{2^{n+1}}.$$

По предположению индукции $(2^n-3)!!$ сравнимо с -1 или 2^n-1 по модулю 2^{n+1}, в обоих случаях отсюда сразу следует утверждение индукционного перехода.

6. Заметим, что по условию $a^2 \geqslant 4 \geqslant c$ и аналогично для b^2. Тогда $(a^2-c)(b^2-c) \geqslant 0$, что означает, что $a^2b^2+c^2 \geqslant c(a^2+b^2)$, откуда имеем

$$\frac{c}{a^2b^2+c^2} \leqslant \frac{c}{c(a^2+b^2)} = \frac{1}{a^2+b^2}.$$

Складывая три таких неравенства, получаем требуемое.

7. см. решение задачи 7 из старшей лиги.

8. Заметим, что $n=(m^2-m+1)(m^2+m+1)(m-1)(m+1)$. Пусть $p=2$, тогда на 2 могут делиться только последние две скобки, причем одна из них не делится на 4, поэтому примарный сомножитель не превосходит $2(m+1) < 3\sqrt[3]{n} = 3\sqrt[3]{m^6-1}$, что очевидно верно для $m>10$. Пусть p — нечетное, тогда если только одна скобка делится на это простое, то примарный сомножитель не превосходит $m^2+m+1 < 2\sqrt[3]{m^6-1}$. Если же оно входит в две скобки, то нетрудно понять, что это могут быть только скобки $m^2-m+1=(m+1)^2-3m$ и $m+1$ или $m^2+m+1=(m-1)^2-3m$ и $m-1$. у каждой из этих пар наибольшим общим делителем может быть только 3. Если $m-1 \,\vdots\, 3$, то $m^2+m+1=(m-1)^2+3m \not\vdots\, 9$ (для другой пары аналогично), тогда примарный сомножитель не превосходит $3(m-1) < 2\sqrt[3]{m^6-1}$ для больших m.

Четвертый тур. Решения Младшей Лиги'.

задачи 1–6 см. решения задач младшей лиги.

7. Продлим BD до пересечения с AC, пусть получится точка M. Имеем $\angle ADM = \angle BAD + \angle DAB = \angle DAC$. Отсюда получаем, что $AM = AD$. Значит $AD + AC = AD + AM + MC = BD + DM + MC > BC$, что и требовалось доказать.

8. Предоположим противное: пусть числа m и n оказались взаимно просты. Приводя к общему знаменателю и преобразовывая числитель, мы получим, что число $(m+n)(m+n+1)-2mn$ делится на mn. Так как $m+m$ и mn взаимно просты (если взаимно просты m и n), а $2mn$ делится на mn мы получим, что $m+n+1$ делится на mn. Однако (так как по условию m и n больше 3), имеем $mn \geqslant 3\max(m.n) > m+n+1$, что и означает, что $m+n+1$ не может делится на mn.