Двадцать Второй Российский Фестиваль юных математиков

Финал. Решения Старшей Лиги.

1. Ответ: 50. Сравним первого со вторым, дальше на которого укажут с третьим, из них на кого указали с четвертым …с 51 первом, среди этих 51 …есть радиоктивный, значит в конце указывать будут на него.

За меньше нельзя, нарисуем наш граф запросов. Он как-то разобьется на компоненты связности, выберем максимальную по размеру, покрасим ее в первый цвет, выберем следующую, если в первом еще меньше 50 покрасим в первый иначе во торой и тд. Так в конце у нас окажется два графа по 50 вершин, так как на каждом шаге, когда мы пытаемся покрасить компоненту размера k, у нас будет еще хотя бы $k-1$ вершина не покрашенная (значит какого то цвета максимум $50-k$), а это верно, так как каждый раз проведено среди не покрашенных вершин ребер меньше чем половина от их количество.

У нас возможны два варианта, когда все первые радиоактивные или когда все второго, их различить не получится.

2. Пусть P — множество остатков k-ых степеней простых по модулю m, $P_1 = P$, $P_j = P_{j-1} + P$ (сложение по модулю m). Достаточно доказать, что P_m содержит все остатки по модулю m, тогда для любого $i = 0, 1, \ldots, n-1$ можно выбрать m k–ых степеней простых с остатком i по модулю m. Дополняя их n k-ми степенями простых представим в требуемом виде все достаточно большие числа, дающие остаток i по модулю m. Для этого докажем, что если $|P_j| < m$, то $|P_{j+1}| > |P_j|$. В самом деле, P_{j+1} содержит множество $P_j + p^k$ для любого простого p. Поэтому если $|P_{j+1}| = |P_j|$, то $P_{j+1} = P_j + p^k$. Также $P_{j+1} = P_j + q^k$ для другого простого q, откуда $P_j = P_j + (p^k - q^k)$. То есть множество P_j переходит в себя при сдвиге на все разности типа $p^k - q^k$. Заметим, что эти разности взаимно просты в совокупности (на простое r не делится разность $p^k - q^k$ при $p = r$, $q \neq r$). Отсюда получаем, что P_j переходит в себя при сдвиге на 1, но тогда $|P_j| = m$.

3. Так как наша окружность касается прямых AB и PK, то $\angle BAP = \angle BCA = \angle KP$. Из этого следует, что треугольники ABC и PBA подобны, и значит есть преобразование подобия. переводящая один треугольник в другой. Пусть точка K' в треугольнике ABC, которая при подобии соответствует точке K. Тогда K' лежит на биссектрисе угла $\angle ABC$ и $\angle K'AC = \angle LAB$.

Это означает, что точки K' и L изогонально сопряжены. Тогда $\angle LCB = \angle K'CA = \angle LAK$.

4. Из первого равенства получаем $y = \frac{x^3-3x}{3x^2-1}$, а это, легко видеть, формула тангенса тройного угла. Выберем α такое, что $x = tg(\alpha)$, тогда $y = tg(3\alpha)$, из второго равенства получим $z = tg(9\alpha)$, а из третьего $x = tg(27\alpha)$. Отсюда получаем, что $26\alpha = k\pi$. Значит ответ $x = tg(\frac{k\pi}{26})$, $y = tg(\frac{3k\pi}{26})$ и $z = tg(\frac{9k\pi}{26})$.

5. Достаточно доказать, что всякий неприводимый делитель $g_1(x)$ многочлена g делит f. Предположим противное. Тогда многочлены f и g_1 взаимно просты, и для некоторых многочленов p, q с рациональными коэффициентами $f(x)p(x) + g_1(x)q(x) = 1$. Домножая это равенство на общий знаменатель, получаем, что $f(x)P(x) + g_1(x)Q(x) = M \neq 0$ — целая ненулевая константа для многочленов P, Q с целыми коэффициентами. Отсюда получаем, что НОД$(f(n), g_1(n))$ — делитель M при всех n. Рассмотрим такое n, что $g_1(n)$ имеет простой делитель p больший, чем M (например, подойдет любое n, кратное $M!$, такое, что $g_1(n) \neq \pm 1$). Тогда $f(n)$ и p взаимно просты. Подберем k такое, что число $m := n + pk$ делится на $f(n)$. Тогда $f(m)$ дает остаток 1 при делении на $f(n)$, то есть при $f(m)$ и $f(n)$ взаимно просты, в то время как $g(m)$ и $g(n)$ делятся на p. Противоречие.

6. Ответ: 4/3. Пусть $A_1A_3A_5$ правильный треугольник с центром $A_2 = A_4$ и площади 1. Тогда $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 1/3$, а $s_5 = 1$. Из этого следует, что $\alpha \leqslant 4/3$.

Докажем, что $s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1} \geqslant 4/3 s_n$. Рассмотрим такое число k, что $S(A_nA_1A_k) = s_n$. Заменив точки A_i на их проекции на плоскость $A_nA_1A_k$ можно считать, что ломаная лежит в этой плоскости (правая часть неравенства не изменится, тогда как левая разве что уменьшится). Переведем треугольник $A_nA_1A_k$ аффинным преобразованием в правильный и обозначим его центр через O. Заметим, что если заменить исходную ломаную на ломаную, полученную из нее добавлением вершины на какое-то ребро, то неравенство, которое нужно доказать не изменится. Докажем, что $s_1 + s_2 + \ldots + s_{k-1} \geqslant 2/3 s_n$. Аналогично $s_k + s_{k+1} + \ldots + s_{n-1} \geqslant 2/3 s_n$. Пусть P — точка пересечения ломаной $A_1, \ldots, A_k$ с прямой A_nO. Можно считать, что P вершина ломаной, поэтому обозначим ее через A_m. Докажем, что $s_1 + s_2 + \ldots + s_{m-1} \geqslant 1/3 s_n$. Построим новую ломаную. Для этого рассмотрим прямую A_1O и отразим относительно нее те куски ломаной $A_1, \ldots, A_m$, которые лежат по ту же сторону относительно этой прямой что и A_k. Заметим, что все треугольники, которые построены на звеньях отраженной ломаной и имеют в качестве третьей вершины A_k полностью покроют треугольник A_1OA_k. Из этого следует, что сумма их площадей хотя бы $1/3 s_n$. Тогда если на каждом ребре ломаной $A_1, \ldots, A_m$ написать площадь треугольника с третьей вершиной A_k или A_n (в зависимости от положения этого ребра относительно прямой A_1O), то сумма этих площадей будет меньше чем $s_1 + \ldots + s_{m-1}$, но не меньше чем $1/3 s_n$. Аналогично получаем, что $s_m + s_{m+1} + \ldots + s_{k-1} \geqslant 1/3 s_n$.

7. Обозначим сферу с центром в точке S и радиусом SA через ω. Заметим, что сечение сферы ω плоскостью грани $ABCDEF$ — окружность. Из этого следует, что шестиугольник $ABCDEF$ вписанный. Обозначим центр его описанной окружности через O. Не сложно заметить, что прямая SO перпендикулярна плоскости грани $ABCDEF$. Из соображений симметрии двугранный угол между гранями OSA и SAB равен двугранному углу между гранями OSB и SAB ($\angle(OSA; SAB) = \angle(OSB; SAB)$). Аналогично $\angle(OSB; SBC) = \angle(OSC; SBC)$, $\angle(OSC; SCD) = \angle(OSD; SCD)$, и т.д. Складывая полученные равенства с нужными знаками получаем требуемое равенство.

8. Для каждого $t \in N$, выберем минимальное g_t, такое что, для него существует большое A, и что любой прямоугольник $t \times B$, можно разбить, если $B \vdots g_t$ и $B > A$. Если такого g_t нет то $g_t = 0$ (Это значит со стороной t нет хороших прямоугольников). Выберем среди всех g_t минимальное не равное 0 (если нет такого, то и нет хороших прямоугольников). Для любого a, $g_a \vdots g_t$, так как легко заметить, что $g_{ab} \leqslant (g_a, g_t)$. Если $M \times N$ хороший и $M, N > A$, то тогда $(M + tg_t) \times (N + tg_t)$ тоже хороший. Обозначим за $k_n^{'}$ количество прямоугольников стороны которого больше A и меньше n. Ясно, что $\frac{k_n^{'}}{n^2}$ имеет рациональный предел, но и не сложно заметить, что у r_n тот же предел.

9. Оценим первое слагаемое нашей суммы. Это слагаемое $\frac{x_1^n}{x_1x_2\ldots x_k + x_{k+1}x_{k+2}\ldots x_{k+n}}$. Домножим числитель и знаменатель на n и оценим каждое слагаемое в знаменателе по неравенству о средних для n чисел: $nx_1x_2\ldots x_k \leqslant (n-k) + x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n$ (мы дополнили набор из k чисел $n-k$ единицами), $nx_{k+1}x_{k+2}\ldots x_{k+1}^n + x_{k+2}^n + \ldots x_{n+k}^n$. Обозначая через S сумму $x_1^n + x_2^n + \ldots + x_{n+k}^n$, мы видим, что знаменатель оценился сверху числом $(n-k) + S$. Отсюда имеем оценку на первое слагаемое: $\frac{x_1^n}{x_1x_2\ldots x_k + x_{k+1}x_{k+2}\ldots x_{k+n}} \geqslant \frac{nx_1^n}{(n-k)+S}$. Складывая такие неравенства для всех слагаемых мы получим, что сумма оценилась снизу числом $\frac{nS}{(n-k)+S}$. Из условия следует, что $S \geqslant n+k$, откуда имеем, что $\frac{nS}{(n-k)+S} \geqslant \frac{n+k}{2}$, что и требовалось.

10. Рассмотрим все наборы людей, среди которых нет пар врагов (будем называть спокойными компаниями) — $C_1, C_2, \ldots, C_m$. Докажем, что каждая пара друзей принадлежит хотя бы $2^{-12}m$ спокойным компаниям, тогда суммируя данные в условии оценки по всем спокойным компаниям получим требуемое. Рассмотрим пару друзей — Кирилла и Александра — и всех их врагов. Оставшихся людей назовем простыми ребятами. Разобьем все спокойные компании на группы в зависимости от того, какие простые ребята в них состоят. Заметим, что в каждой группе имеется не более 2^{12} спокойных компаний (получаемых добавлений кого-то из Александра, Кирилла и их врагов), но хотя бы одна из них (получаемая добавлением Кирилла и Александра) будет содержать и Кирилла, и Александра! Суммируя по всем группам получаем требуемое.

Финал. Решения Младшей Лиги.

1. см. решение задачи 1 из старшей лиги.

2. см. решение задачи 9 старшей лиги, для $k = 2$ и $n = 3$.

3. Опустим из точки I перпендикуляры IP_1, IP_2, IP_3 на высоты. Поскольку высоты пересекают вписанную окружность, расстояния от точки I до высот не превосходят r, и следовательно, длины построенных отрезков IP_1, IP_2, IP_3 тоже не превосходят r. Высоты, проходящие через точку H, разбивают плоскость на 6 углов, величины которых равны углам треугольника, т.е. эти углы острые. Отрезок HI находится в одном из углов, следовательно, один из углов $\angle IHP_i$ не превосходит $45°$. Тогда в прямоугольном треугольнике IHP_i $IH \leqslant IP_i \cdot \sqrt{2} \leqslant \sqrt{2}r$.

4. Разобьем граф на две половинки, в каждой выберем цепь из 99 звеньев и соединим начала этих цепей.

5. Докажем лемму: пусть m и n — натуральные числа, такие, что $\frac{m}{n} < \sqrt{23}$. Тогда $\frac{m}{n} + \frac{3}{mn} < \sqrt{23}$. Действительно, условие, что $\frac{m}{n} < \sqrt{23}$ означает, что $m^2 < 23n^2$, то есть $23n^2 \geqslant m^2 + 1$. Перебирая остатки по модулю 23 и 5 получаем, что $23n^2 \geqslant m^2 + 7$, откуда $23 \geqslant (\frac{m}{n})^2 + \frac{7}{n^2} > (\frac{m}{n} + \frac{3}{mn})^2$ при $m \geqslant 4$. Случаи $m = 1$, 2 или трем проверяются непосредственно. Из леммы мы можем заключить, что тем более верно, что $\frac{m}{n} + \frac{3}{5n^2} < \sqrt{23}$, так как $m < 5n$.

Пусть теперь в десятичном разложении числа $\sqrt{23}$ на местах с n по $2n$ находятся нули. Это означает, что $\frac{m}{10^{n-1}} < \sqrt{23} < \frac{m}{10^{n-1}} + \frac{1}{10^{2n}}$. Отсюда, а также из леммы, получаем, что $\frac{3}{5(10^{n-1})^2} < \frac{1}{10^{2n}}$. Легко видеть, что это не так.

6. см. решение задачи 6 из старшей лиги.

7. Ответ: $n = 1$, 2, 3 или 5. Заметим, что

$$C_{2n}^{2k} = C_k^n \cdot \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2k+1)}{(2k-1)!!} = C_k^n \cdot \frac{N}{M}.$$

Разберем несколько случаев:

1. Пусть n — четно. Случай $n = 2$ очевиден, пусть $n > 2$. Тогда пусть $p \geqslant 3$ — простой делитель $n-1$. Положим $k = \frac{p+1}{2}$, то есть $p = 2k-1$. Тогда M делится на p, а N, как нетрудно видеть, нет. Действительно, между $2n - 2k - 1 = 2(n-1) - p$ и $2n - 2 = 2(n-1)$ нет чисел, кратных p.

2. Пусть n — нечетно. Случай $n = 1$ очевиден, пусть $n \geqslant 3$. Теперь возникает несколько подслучаев.

2.1 У $n-1$ есть нечетный простой делитель p. Тогда действуем совершенно аналогично первому случаю.

2.2 У $n-2$ есть простой делитель $p > 3$. Тогда полагаем $k = \frac{p+1}{2}$ как и выше, и видим, что M делится на p, но N на p не делится, так как между $2n - 2k - 3 = 2(n-2) - p$ и $2n - 4 = 2(n-2)$ нет чисел, кратных p, а $2n-1$ не делится на p, как $p > 3$.

2.3 Осталось разобрать случай, когда у $n-1$ нет нечетных простых делителей, а у $n-2$ нет простых делителей, больших 3. Это означает, что $n-1=2^a$ и $n-2=3^b$. Имеем уравнение $2^a=3^b+1$, которое решается по модулю 8 и получается два ответа: $a=1$, $b=0$ или $a=2$, $b=1$. В этих случаях получаем $n=3$ или $n=5$ соответственно. Несложно видеть, что оба этих варианта подходят. s

8. Пусть E — точка пересечения QR и AB, D – точка пересечения PR и AC. Тогда треугольники AEQ и ADP подобны. Треугольники AQC и APB тоже подобны. Сопоставляя эти два наблюдения, мы заключаем, что тогда треугольники ADE и ABC подобны, прямая DE антипараллельна BC и AM — медиана треугольника DAE.

Хорошо известно, что прямая AL содержит симедиану треугольника ABC. Для решения задачи достаточно проверить, что прямая AR содержит симедиану треугольника ABC. Это сразу следует из проделанных рассуждений и того общего факта, что симедиана делит пополам отрезки антипараллельные стороне, к которой она проведена.