Двадцать Второй Российский Фестиваль юных математиков

Анапа. 5 октября 2011

Первый тур. Старшая группа

1. В алфавите языка племени ЭЮЯ есть только три буквы *э*, *ю* и *я*. Сколько слов длины n в этом алфавите имеет четное число букв *ю*?

2. Два человека играют в следующую игру. На доске написано число 2011^{2011}. За один ход разрешается вычесть из числа любое натуральное число от 1 до 2010, либо поделить имеющееся число на 2011 (с округлением вниз) и результат записать на доску вместо исходного числа. Выигрывает тот, кто получит 0. Кто выиграет при правильной игре?

3. Точки K, L, M и N — середины сторон AB, BC, CD и DA выпуклого четырехугольника $ABCD$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Докажите, что $\angle ANO = \angle BLO$ тогда, и только тогда, когда $\angle BKO = \angle CMO$.

4. Найдите все такие натуральные n, что $2^n - 1$ и $2^{n+2} - 1$ — простые, и при этом $2^{n+1} - 1$ не делится на 7.

5. Дан связный граф, который остается связным при удалении любого ребра, и в котором любые две вершины либо соединены ребром, либо имеют общего соседа. Верно ли, что ребра этого графа можно покрасить в четыре цвета так, чтобы между любыми двумя вершинами нашелся путь, все ребра в котором разного цвета?

6. На сфере выбраны точки P_1, P_2, P_3, P_4. Докажите, что величина $\sum\limits_{i\neq j} \frac{1}{P_iP_j}$ достигает минимального значения, тогда и только тогда, когда точки P_1, P_2, P_3, P_4 являются вершинами правильного тетраэдра.

7. Найдите все такие функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что

$$f(x^2 - xy + y^2) = f^2(x) - f(x)f(y) + f^2(y).$$

8. В ряд лежат 2011 монет — одна “решкой”, остальные — “орлом”. За один ход можно выбрать любую монету, лежащую “решкой” и перевернуть ее соседей (или одного соседа, если эта монета — крайняя). Найдите все позиции, на которых может располагаться изначально монета, лежащая “решкой”, если такими операциями удалось перевернуть все монеты “решкой”.

9. Точка F на основании AB трапеции $ABCD$, диагонали которой пересекаются в точке E, такова, что $CF = DF$. Точки O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников ADF и CBF. Докажите, что $EF \perp O_1O_2$.

10. Все комплексные корни многочлена с целыми коэффициентами по модулю равны 1. Докажите, что все они являются корнями из 1.

Двадцать Второй Российский Фестиваль юных математиков

Анапа. 5 октября 2011

Первый тур. Старшая группа

1. В алфавите языка племени ЭЮЯ есть только три буквы *э*, *ю* и *я*. Сколько слов длины n в этом алфавите имеет четное число букв *ю*?

2. Два человека играют в следующую игру. На доске написано число 2011^{2011}. За один ход разрешается вычесть из числа любое натуральное число от 1 до 2010, либо поделить имеющееся число на 2011 (с округлением вниз) и результат записать на доску вместо исходного числа. Выигрывает тот, кто получит 0. Кто выиграет при правильной игре?

3. Точки K, L, M и N — середины сторон AB, BC, CD и DA выпуклого четырехугольника $ABCD$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Докажите, что $\angle ANO = \angle BLO$ тогда, и только тогда, когда $\angle BKO = \angle CMO$.

4. Найдите все такие натуральные n, что $2^n - 1$ и $2^{n+2} - 1$ — простые, и при этом $2^{n+1} - 1$ не делится на 7.

5. Дан связный граф, который остается связным при удалении любого ребра, и в котором любые две вершины либо соединены ребром, либо имеют общего соседа. Верно ли, что ребра этого графа можно покрасить в четыре цвета так, чтобы между любыми двумя вершинами нашелся путь, все ребра в котором разного цвета?

6. На сфере выбраны точки P_1, P_2, P_3, P_4. Докажите, что величина $\sum\limits_{i\neq j} \frac{1}{P_iP_j}$ достигает минимального значения, тогда и только тогда, когда точки P_1, P_2, P_3, P_4 являются вершинами правильного тетраэдра.

7. Найдите все такие функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что

$$f(x^2 - xy + y^2) = f^2(x) - f(x)f(y) + f^2(y).$$

8. В ряд лежат 2011 монет — одна “решкой”, остальные — “орлом”. За один ход можно выбрать любую монету, лежащую “решкой” и перевернуть ее соседей (или одного соседа, если эта монета — крайняя). Найдите все позиции, на которых может располагаться изначально монета, лежащая “решкой”, если такими операциями удалось перевернуть все монеты “решкой”.

9. Точка F на основании AB трапеции $ABCD$, диагонали которой пересекаются в точке E, такова, что $CF = DF$. Точки O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников ADF и CBF. Докажите, что $EF \perp O_1O_2$.

10. Все комплексные корни многочлена с целыми коэффициентами по модулю равны 1. Докажите, что все они являются корнями из 1.