Двадцать Второй Российский Фестиваль юных математиков

Анапа. 5 октября 2011

Первый тур. Младшая лига

1. В алфавите языка племени ЭЮЯ есть только три буквы: *э*, *ю* и *я*. Сколько слов длины n в этом алфавите имеет четное число букв *ю*?

2. Два человека играют в следующую игру. На доске написано число

$$20110002011000\,.$$

За один ход разрешается вычесть из числа любое натуральное число от 1 до 9, либо поделить имеющееся число на 10 (с округлением вниз) и записать результат на доску вместо исходного числа. Выигрывает тот, кто получит 0. Кто выиграет при правильной игре начинающий или его противник?

3. В четырехугольнике $ABCD$ оказалось, что: $\angle CAD = 59^\circ$, $\angle CAB = 62^\circ$ и $\angle ABD = \angle CBD = 22^\circ$. Найдите $\angle ACD$.

4. Найдите все такие натуральные n, что $2^n - 1$ и $2^{n+2} - 1$ — простые, и при этом $2^{n+1} - 1$ не делится на 7.

5. Дан связный граф, который остается связным при удалении любого ребра, и в котором любые две вершины либо соединены ребром, либо имеют общего соседа. Верно ли, что ребра этого графа можно покрасить в четыре цвета так, чтобы между любыми двумя вершинами нашелся путь, все ребра в котором покрашены в разные цвета?

6. На окружности выбраны точки P_1, P_2, P_3, P_4. Докажите, что величина

$$\frac{1}{P_1P_2} + \frac{1}{P_2P_3} + \frac{1}{P_3P_4} + \frac{1}{P_4P_1} + \frac{1}{P_1P_3} + \frac{1}{P_2P_4}$$

достигает минимального значения, когда точки P_1, P_2, P_3, P_4 являются вершинами квадрата.

7. Солдаты Василий и Петр получили наряд по кухне: почистить 60 кг картошки и 60 кг морковки. Василий за один час чистит 3 кг картошки или 5 кг морковки, а Петр за один час чистит 2 кг картошки или 4 кг морковки. За какое минимальное время они могут справиться с нарядом?

8. В ряд лежат 2011 монет — одна “решкой остальные — “орлом”. За один ход можно выбрать любую монету, лежащую “решкой”, и перевернуть ее соседей (или одного соседа, если эта монета — крайняя). Найдите все позиции, на которых может располагаться изначально монета, лежащая “решкой”, если такими операциями удалось перевернуть все монеты “решкой”.

Двадцать Второй Российский Фестиваль юных математиков

Анапа. 5 октября 2011

Первый тур. Младшая лига

1. В алфавите языка племени ЭЮЯ есть только три буквы: *э*, *ю* и *я*. Сколько слов длины n в этом алфавите имеет четное число букв *ю*?

2. Два человека играют в следующую игру. На доске написано число

$$20110002011000\,.$$

За один ход разрешается вычесть из числа любое натуральное число от 1 до 9, либо поделить имеющееся число на 10 (с округлением вниз) и записать результат на доску вместо исходного числа. Выигрывает тот, кто получит 0. Кто выиграет при правильной игре начинающий или его противник?

3. В четырехугольнике $ABCD$ оказалось, что: $\angle CAD = 59^\circ$, $\angle CAB = 62^\circ$ и $\angle ABD = \angle CBD = 22^\circ$. Найдите $\angle ACD$.

4. Найдите все такие натуральные n, что $2^n - 1$ и $2^{n+2} - 1$ — простые, и при этом $2^{n+1} - 1$ не делится на 7.

5. Дан связный граф, который остается связным при удалении любого ребра, и в котором любые две вершины либо соединены ребром, либо имеют общего соседа. Верно ли, что ребра этого графа можно покрасить в четыре цвета так, чтобы между любыми двумя вершинами нашелся путь, все ребра в котором покрашены в разные цвета?

6. На окружности выбраны точки P_1, P_2, P_3, P_4. Докажите, что величина

$$\frac{1}{P_1P_2} + \frac{1}{P_2P_3} + \frac{1}{P_3P_4} + \frac{1}{P_4P_1} + \frac{1}{P_1P_3} + \frac{1}{P_2P_4}$$

достигает минимального значения, когда точки P_1, P_2, P_3, P_4 являются вершинами квадрата.

7. Солдаты Василий и Петр получили наряд по кухне: почистить 60 кг картошки и 60 кг морковки. Василий за один час чистит 3 кг картошки или 5 кг морковки, а Петр за один час чистит 2 кг картошки или 4 кг морковки. За какое минимальное время они могут справиться с нарядом?

8. В ряд лежат 2011 монет — одна “решкой остальные — “орлом”. За один ход можно выбрать любую монету, лежащую “решкой”, и перевернуть ее соседей (или одного соседа, если эта монета — крайняя). Найдите все позиции, на которых может располагаться изначально монета, лежащая “решкой”, если такими операциями удалось перевернуть все монеты “решкой”.