Двадцать Второй Российский Фестиваль юных математиков

Анапа. 6 октября 2011

Второй тур. Старшая лига

1. В ряд выложено 100 карт рубашкой вниз. Вася и Петя ходят по очереди. Вася ходит первым и за один ход переворачивает любые две соседние карты. Петя ходит вторым и за один ход может перевернуть любые две карты. Какого наибольшего количества карт, лежащих рубашкой вверх, может добиться Петя после своего хода независимо от действий Васи?

2. Какое наибольшее количество ребер пирамиды может пересечь плоскость, не проходящая через вершины, если основание пирамиды — 100-угольник (не обязательно выпуклый)?

3. Сумма положительных чисел a, b, c и d равна 4. Докажите неравенство

$$\frac{a^2+3a}{a^3+8}+\frac{b^2+3b}{b^3+8}+\frac{c^2+3c}{c^3+8}+\frac{d^2+3d}{d^3+8}\leqslant\frac{16}{9}.$$

4. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b существуют такие натуральные c и d, что числа $an+c$ и $bn+d$ взаимно просты при всех натуральных n.

5. На сторонах AB и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбрали точки L и K соответственно. Оказалось, что

$$\angle ABC+\angle KBC=\angle BCD+\angle BCK=\angle BCD+\angle LCD=\angle CDA+\angle CDL=180^\circ.$$

Докажите, что $\angle BAC=\angle CAD$.

6. Основание D высоты остроугольного треугольника ABC лежит на стороне BC. I_a — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Точка K, лежащая на продолжении AB за точку B, такова, что $\angle AKI_a=90^\circ+\frac{3}{4}\angle ACB$. Прямая I_aK пересекает продолжение AD в точке L. Докажите, что прямая DI_a является биссектрисой угла $\angle AI_aB$ тогда и только тогда, когда отрезок AL равен по длине диаметру описанной окружности треугольника ABC.

7. В каждой точке координатной плоскости с целыми неотрицательными координатами находится кочка. Федя стоит на кочке $(0,0)$ и хочет попасть на кочку $(2n,0)$. Он может прыгать на другие кочки по диагоналям квадратов 1×1 так, чтобы хотя бы одна из двух его координат увеличивалась. При этом Федя не должен бывать на одной кочке дважды. Сколькими способами Федя может совершить своё увлекательное путешествие?

8. Можно ли расставить по кругу 2011 различных целых чисел так, чтобы сумма попарных произведений соседних чисел равнялась сумме всех чисел стоящих по кругу?

9. Степени всех вершин графа нечетны. Докажите, что через любое его ребро проходит четное число гамильтоновых циклов.

10. Многочлен $f(x)$ с вещественными коэффициентами степени n таков, что для любых целых $0\leqslant a<b\leqslant n$ число $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$ — целое. Докажите, что это выражение целое для всех целых a и b.

Двадцать Второй Российский Фестиваль юных математиков

Анапа. 6 октября 2011

Второй тур. Старшая лига

1. В ряд выложено 100 карт рубашкой вниз. Вася и Петя ходят по очереди. Вася ходит первым и за один ход переворачивает любые две соседние карты. Петя ходит вторым и за один ход может перевернуть любые две карты. Какого наибольшего количества карт, лежащих рубашкой вверх, может добиться Петя после своего хода независимо от действий Васи?

2. Какое наибольшее количество ребер пирамиды может пересечь плоскость, не проходящая через вершины, если основание пирамиды — 100-угольник (не обязательно выпуклый)?

3. Сумма положительных чисел a, b, c и d равна 4. Докажите неравенство

$$\frac{a^2+3a}{a^3+8}+\frac{b^2+3b}{b^3+8}+\frac{c^2+3c}{c^3+8}+\frac{d^2+3d}{d^3+8}\leqslant\frac{16}{9}.$$

4. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b существуют такие натуральные c и d, что числа $an+c$ и $bn+d$ взаимно просты при всех натуральных n.

5. На сторонах AB и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбрали точки L и K соответственно. Оказалось, что

$$\angle ABC+\angle KBC=\angle BCD+\angle BCK=\angle BCD+\angle LCD=\angle CDA+\angle CDL=180^\circ.$$

Докажите, что $\angle BAC=\angle CAD$.

6. Основание D высоты остроугольного треугольника ABC лежит на стороне BC. I_a — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Точка K, лежащая на продолжении AB за точку B, такова, что $\angle AKI_a=90^\circ+\frac{3}{4}\angle ACB$. Прямая I_aK пересекает продолжение AD в точке L. Докажите, что прямая DI_a является биссектрисой угла $\angle AI_aB$ тогда и только тогда, когда отрезок AL равен по длине диаметру описанной окружности треугольника ABC.

7. В каждой точке координатной плоскости с целыми неотрицательными координатами находится кочка. Федя стоит на кочке $(0,0)$ и хочет попасть на кочку $(2n,0)$. Он может прыгать на другие кочки по диагоналям квадратов 1×1 так, чтобы хотя бы одна из двух его координат увеличивалась. При этом Федя не должен бывать на одной кочке дважды. Сколькими способами Федя может совершить своё увлекательное путешествие?

8. Можно ли расставить по кругу 2011 различных целых чисел так, чтобы сумма попарных произведений соседних чисел равнялась сумме всех чисел стоящих по кругу?

9. Степени всех вершин графа нечетны. Докажите, что через любое его ребро проходит четное число гамильтоновых циклов.

10. Многочлен $f(x)$ с вещественными коэффициентами степени n таков, что для любых целых $0\leqslant a<b\leqslant n$ число $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$ — целое. Докажите, что это выражение целое для всех целых a и b.