Двадцать Второй Российский Фестиваль юных математиков

Анапа. 6 октября 2011.

Второй тур. Младшая лига.

1. В ряд выложено 100 карт рубашкой вниз. Вася и Петя ходят по очереди. Вася ходит первым и за один ход переворачивает любые две соседние карты. Петя ходит вторым и за один ход может перевернуть любые две карты. Какого наибольшего количества карт, лежащих рубашкой вверх, может добиться Петя после своего хода независимо от действий Васи?

2. На плоскости нарисован 100-угольник, не обязательно выпуклый. 98 диагоналей, не пересекающихся во внутренних точках, разбивают его на треугольники. Какое наибольшее количество нарисованных отрезков (сторон и диагоналей 100-угольника) может пересечь во внутренних точках одна и та же прямая?

3. Пусть $a \geqslant b \geqslant c > 0$. Докажите неравенство

$$\frac{a^2-b^2}{c}+\frac{c^2-b^2}{a}+\frac{a^2-c^2}{b} \geqslant 3a-4b+c.$$

4. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b существуют такие натуральные числа c и d, что $an+c$ и $bn+d$ взаимно просты при всех натуральных n.

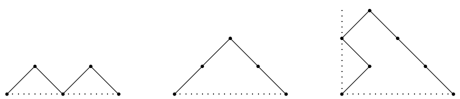
5. На сторонах AB и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбрали точки L и K соответственно. Оказалось, что

$$\angle ABC+\angle KBC=\angle BCD+\angle BCK=\angle BCD+\angle LCD=\angle CDA+\angle CDL=180^\circ.$$

Докажите, что $\angle BAC=\angle CAD$.

6. Дан остроугольный треугольник ABC. Пусть H — ее ортоцентр, а O — центр описанной окружности, а R ее радиус. Серединный перпендикуляр к отрезку OH пересекает стороны треугольника ABC в точках X и Y. Докажите, что $OX+OY \geqslant R$.

7. На клетчатой плоскости рисуют несамопересекающуюся ломаную с вершинами в узлах, идущую из точки $(0,0)$ в точку $(2n,0)$. Ломаная расположена в первой четверти, ее звенья идут по диагоналям клеток в направлении вправо–вверх, влево–вверх или вправо–вниз. Сколько существует таких ломаных? (Ниже приведен пример для $n=2$.)



8. Можно ли расставить по кругу 2011 различных целых чисел так, чтобы сумма попарных произведений соседних чисел равнялась сумме всех чисел стоящих по кругу?

Двадцать Второй Российский Фестиваль юных математиков

Анапа. 6 октября 2011.

Второй тур. Младшая лига.

1. В ряд выложено 100 карт рубашкой вниз. Вася и Петя ходят по очереди. Вася ходит первым и за один ход переворачивает любые две соседние карты. Петя ходит вторым и за один ход может перевернуть любые две карты. Какого наибольшего количества карт, лежащих рубашкой вверх, может добиться Петя после своего хода независимо от действий Васи?

2. На плоскости нарисован 100-угольник, не обязательно выпуклый. 98 диагоналей, не пересекающихся во внутренних точках, разбивают его на треугольники. Какое наибольшее количество нарисованных отрезков (сторон и диагоналей 100-угольника) может пересечь во внутренних точках одна и та же прямая?

3. Пусть $a \geqslant b \geqslant c > 0$. Докажите неравенство

$$\frac{a^2-b^2}{c}+\frac{c^2-b^2}{a}+\frac{a^2-c^2}{b} \geqslant 3a-4b+c.$$

4. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b существуют такие натуральные числа c и d, что $an+c$ и $bn+d$ взаимно просты при всех натуральных n.

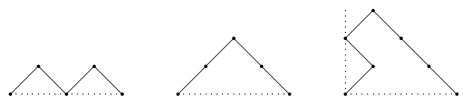
5. На сторонах AB и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбрали точки L и K соответственно. Оказалось, что

$$\angle ABC+\angle KBC=\angle BCD+\angle BCK=\angle BCD+\angle LCD=\angle CDA+\angle CDL=180^\circ.$$

Докажите, что $\angle BAC=\angle CAD$.

6. Дан остроугольный треугольник ABC. Пусть H — ее ортоцентр, а O — центр описанной окружности, а R ее радиус. Серединный перпендикуляр к отрезку OH пересекает стороны треугольника ABC в точках X и Y. Докажите, что $OX+OY \geqslant R$.

7. На клетчатой плоскости рисуют несамопересекающуюся ломаную с вершинами в узлах, идущую из точки $(0,0)$ в точку $(2n,0)$. Ломаная расположена в первой четверти, ее звенья идут по диагоналям клеток в направлении вправо–вверх, влево–вверх или вправо–вниз. Сколько существует таких ломаных? (Ниже приведен пример для $n=2$.)



8. Можно ли расставить по кругу 2011 различных целых чисел так, чтобы сумма попарных произведений соседних чисел равнялась сумме всех чисел стоящих по кругу?