Двадцать Второй Российский Фестиваль юных математиков

Анапа. 8 октября 2011

Третий тур. Старшая лига

1. Пусть a — целое число такое, что квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + ax + 2011!$ не имеет вещественных корней. Докажите, что ни при каком натуральном k многочлен $f(x^k)$ не может быть разложен в произведение двух непостоянных многочленов с целыми коэффициентами.

2. В множестве $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ выбрано k подмножеств так, что для любых двух различных элементов a, $b \in M$ найдутся два непересекающихся выбранных подмножества A и B таких, что $a \in A$, $b \in B$. Докажите, что $3^k \geqslant n^3$.

3. Продолжение биссектрисы BL треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке K. Точки C_1 и A_1 на сторонах BA и BC соответственно таковы, что $\angle C_1LA = \angle A_1LC = \angle ABC$. Точки P и Q таковы, что четырехугольники $AKLP$ и $CKLQ$ — параллелограммы. Докажите, что $PC_1 = QA_1$.

4. На доске нарисован выпуклый четырехугольник $ABCD$. Хулиган Вася, подходя к доске, меняет у него вершину B на точку, симметричную B относительно серединного перпендикуляра к AC (старую вершину стирает, новую обозначает B). Хулиган Петя , подходя к доске, меняет вершину C на точку, симметричную C относительно серединного перпендикуляра к BD. Они подходили к доске в таком порядке: Вася, Петя, Вася, Петя, Вася, Петя (ровно шесть раз). Известно, что после каждого хулиганства четырехугольник оставался выпуклым. Докажите, что в конце получился исходный четырехугольник.

5. На Марсе живут марсиане трех полов, по n марсиан каждого пола. Некоторые пары марсиан разного пола испытывают симпатию (всегда взаимную). Брачный союз заключается между тремя марсианами разных полов, которые попарно друг другу симпатизируют. Известно, что каждый марсианин симпатизирует не менее чем $3n/4$ представителям каждого из двух других полов. Докажите, что все марсиане могут разбиться на n брачных союзов.

6. Можно ли множество чисел $\{1, 2, 3, \ldots, 2010\}$ разбить на 402 непересекающиеся пятерки таким образом, чтобы в каждой пятерке сумма чисел делилась на 2011?

7. Найдите все функции $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ такие, что при любых неотрицательных x и y $\quad f(x^2) + f(y) = f\left(x^2 + y + xf(4y)\right)$

8. Неотрицательные числа a, b и c таковы, что $a+b+c \leqslant 1$. Докажите неравенство

$$a^2b + b^2c + c^2a + 3(a + b + c) + 15abc \geqslant 11(ab + bc + ca).$$

9. Будем говорить, что в пространстве четыре различные точки A, B, C и D (именно в таком порядке) образуют *цепляющую четверку*, если любые две не имеющие общих точек окружности ω_1, ω_2 в пространстве такие, что точки A и B лежат на ω_1, а точки C и D лежат на ω_2, зацеплены. Даны точки A, B, C. Найдите в пространстве геометрическое место точек D таких, что A, B, C, D — цепляющая четверка.

10. Какое наибольшее количество L–тетрамино можно вырезать из квадрата $103{\times}103$?

Двадцать Второй Российский Фестиваль юных математиков

Анапа. 8 октября 2011

Третий тур. Старшая лига

1. Пусть a — целое число такое, что квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + ax + 2011!$ не имеет вещественных корней. Докажите, что ни при каком натуральном k многочлен $f(x^k)$ не может быть разложен в произведение двух непостоянных многочленов с целыми коэффициентами.

2. В множестве $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ выбрано k подмножеств так, что для любых двух различных элементов a, $b \in M$ найдутся два непересекающихся выбранных подмножества A и B таких, что $a \in A$, $b \in B$. Докажите, что $3^k \geqslant n^3$.

3. Продолжение биссектрисы BL треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке K. Точки C_1 и A_1 на сторонах BA и BC соответственно таковы, что $\angle C_1LA = \angle A_1LC = \angle ABC$. Точки P и Q таковы, что четырехугольники $AKLP$ и $CKLQ$ — параллелограммы. Докажите, что $PC_1 = QA_1$.

4. На доске нарисован выпуклый четырехугольник $ABCD$. Хулиган Вася, подходя к доске, меняет у него вершину B на точку, симметричную B относительно серединного перпендикуляра к AC (старую вершину стирает, новую обозначает B). Хулиган Петя , подходя к доске, меняет вершину C на точку, симметричную C относительно серединного перпендикуляра к BD. Они подходили к доске в таком порядке: Вася, Петя, Вася, Петя, Вася, Петя (ровно шесть раз). Известно, что после каждого хулиганства четырехугольник оставался выпуклым. Докажите, что в конце получился исходный четырехугольник.

5. На Марсе живут марсиане трех полов, по n марсиан каждого пола. Некоторые пары марсиан разного пола испытывают симпатию (всегда взаимную). Брачный союз заключается между тремя марсианами разных полов, которые попарно друг другу симпатизируют. Известно, что каждый марсианин симпатизирует не менее чем $3n/4$ представителям каждого из двух других полов. Докажите, что все марсиане могут разбиться на n брачных союзов.

6. Можно ли множество чисел $\{1, 2, 3, \ldots, 2010\}$ разбить на 402 непересекающиеся пятерки таким образом, чтобы в каждой пятерке сумма чисел делилась на 2011?

7. Найдите все функции $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ такие, что при любых неотрицательных x и y $\quad f(x^2) + f(y) = f\left(x^2 + y + xf(4y)\right)$

8. Неотрицательные числа a, b и c таковы, что $a+b+c \leqslant 1$. Докажите неравенство

$$a^2b + b^2c + c^2a + 3(a + b + c) + 15abc \geqslant 11(ab + bc + ca).$$

9. Будем говорить, что в пространстве четыре различные точки A, B, C и D (именно в таком порядке) образуют *цепляющую четверку*, если любые две не имеющие общих точек окружности ω_1, ω_2 в пространстве такие, что точки A и B лежат на ω_1, а точки C и D лежат на ω_2, зацеплены. Даны точки A, B, C. Найдите в пространстве геометрическое место точек D таких, что A, B, C, D — цепляющая четверка.

10. Какое наибольшее количество L–тетрамино можно вырезать из квадрата $103{\times}103$?