Двадцать Второй Российский Фестиваль юных математиков

Анапа. 8 октября 2011

Третий тур. Младшая лига

1. Косте кажется, что если в 30–значном числе все цифры не меньше 5 и сумма сороковых степеней его цифр делится на 143, то и само число делится на 143. Не ошибается ли Костя?

2. Можно ли в множестве $\{1, 2, \ldots, 2011\}$ выделить 21 подмножество так, чтобы для любых двух элементов нашлись два непересекающихся подмножества, одно из которых содержит первый элемент, а другое — второй?

3. Продолжение биссектрисы BL треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке K. Точки C_1 и A_1 на сторонах BA и BC соответственно таковы, что $\angle C_1LA = \angle A_1LC = \angle ABC$. Точки P и Q таковы, что четырехугольники $AKLP$ и $CKLQ$ — параллелограммы. Докажите, что $PC_1 = QA_1$.

4. На каждой стороне квадрата со стороной 1 внутрь него построены правильные треугольники. Найдите площадь центральной части на получившейся картинке.

5. В стране 20 городов, любые два города соединены дорогой. Почти все дороги закрыты на ремонт, открыто лишь одностороннее движение на 18 дорогах. Докажите, что можно открыть одностороннее движение еще на 19 дорогах так, чтобы от любого города можно было добраться до любого другого (при этом ни на одной из дорог не должно появиться двустороннее движение).

6. Два туриста вышли одновременно из пункта A в пункт B с постоянными скоростями. Когда первый прошел половину пути, второму оставалось пройти 40 км. А когда второй прошел половину пути, первому оставалось пройти 15 км. Чему равно расстояние между пунктами A и B?

7. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такова, что a_k — это число членов этой последовательности, кратных k. При каких n такая последовательность может существовать?

8. Положительные числа a, b и c таковы, что $ab+bc+ca = 3$. Докажите неравенство:

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)} + \frac{1}{1+b^2(a+c)} + \frac{1}{1+c^2(a+b)} \leqslant \frac{1}{abc}.$$

Двадцать Второй Российский Фестиваль юных математиков

Анапа. 8 октября 2011

Третий тур. Младшая лига

1. Косте кажется, что если в 30–значном числе все цифры не меньше 5 и сумма сороковых степеней его цифр делится на 143, то и само число делится на 143. Не ошибается ли Костя?

2. Можно ли в множестве $\{1, 2, \ldots, 2011\}$ выделить 21 подмножество так, чтобы для любых двух элементов нашлись два непересекающихся подмножества, одно из которых содержит первый элемент, а другое — второй?

3. Продолжение биссектрисы BL треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке K. Точки C_1 и A_1 на сторонах BA и BC соответственно таковы, что $\angle C_1LA = \angle A_1LC = \angle ABC$. Точки P и Q таковы, что четырехугольники $AKLP$ и $CKLQ$ — параллелограммы. Докажите, что $PC_1 = QA_1$.

4. На каждой стороне квадрата со стороной 1 внутрь него построены правильные треугольники. Найдите площадь центральной части на получившейся картинке.

5. В стране 20 городов, любые два города соединены дорогой. Почти все дороги закрыты на ремонт, открыто лишь одностороннее движение на 18 дорогах. Докажите, что можно открыть одностороннее движение еще на 19 дорогах так, чтобы от любого города можно было добраться до любого другого (при этом ни на одной из дорог не должно появиться двустороннее движение).

6. Два туриста вышли одновременно из пункта A в пункт B с постоянными скоростями. Когда первый прошел половину пути, второму оставалось пройти 40 км. А когда второй прошел половину пути, первому оставалось пройти 15 км. Чему равно расстояние между пунктами A и B?

7. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такова, что a_k — это число членов этой последовательности, кратных k. При каких n такая последовательность может существовать?

8. Положительные числа a, b и c таковы, что $ab+bc+ca = 3$. Докажите неравенство:

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)} + \frac{1}{1+b^2(a+c)} + \frac{1}{1+c^2(a+b)} \leqslant \frac{1}{abc}.$$