Двадцать Второй Российский Фестиваль юных математиков

Анапа. 8 октября 2011

Четвертый тур с заменой. Старшая лига

1. В графе n вершин и $m > n(n-1)/4$ ребер. Имеется m графов, получаемых из исходного удалением одного ребра (каждому ребру исходного графа соответствует один граф). Эти графы передали Ласло. Докажите, что он сможет восстановить исходный граф.

2. Дано множество M. Его тремя способами разбили на 12 подмножеств $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant 12}$, $(B_i)_{1\leqslant i\leqslant 12}$, $(C_i)_{1\leqslant i\leqslant 12}$ таким образом, что $|A_i\cap B_j|+|B_j\cap C_k|+|C_k\cap A_i|\geqslant 12$ для всех троек натуральных чисел i, j, k, не превосходящих 12. Какое наименьшее количество элементов могло содержать множество M?

3. Пусть p — простое число. Назовем натуральное n *интересным*, если $x^n-1=(x^p-x+1)f(x)+pg(x)$ для некоторых многочленов f и g с целыми коэффициентами. Для каких p наименьшее интересное число равно p^p-1?

4. Даны окружность ω с центром O и точка T вне ее. Касательные из точки T к окружности ω касаются ее в точках B и C. Окружности ω_1 и ω_2 расположены в треугольнике TBC, касаются окружности ω внешним образом и касаются друг друга в точке J; кроме того, ω_1 касается отрезка TB в точке K, ω_2 касается отрезка TC в точке H. Точка I — центр вписанной окружности треугольника OBC. Докажите, что четырехугольник $BKJI$ вписанный.

5. Найдите все натуральные числа $n>2$, для которых существуют натуральные числа a_1, a_2, …, a_n такие, что числа a_1a_2, a_2a_3, …, $a_{n-1}a_n$, a_na_1 в указанном порядке образуют непостоянную арифметическую прогрессию.

6. Докажите неравенство $\sum\limits_{n=1}^{N}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)<\frac{1}{3}(\ln 2)^3$.

7. Окружности ω_1 и ω_2 касаются окружности ω в точках C и D соответственно, и пересекаются в точках A и B. AM и AN — касательные из A к ω. Оказалось, что точки A, C, D лежат на одной прямой. Докажите, что прямые AB, CM и ND пересекаются в одной точке.

8. Найдите сумму $\sum\limits_{k=1}^{n}(k,n)\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$.

9. Дано положительное число c. Вася задумал число от 1 до M. Петя пытается его угадать, задавая вопросы, ответы на которые — да или нет. Петя дает Васе список из n вопросов (количество вопросов выбирает Петя), потом Вася на них отвечает. Общее количество неверных ответов Васи не должно превосходить cn. При каких c Петя имеет возможность наверняка угадать Васино число?

10. Дано множество из 1000 точек на плоскости, не все из которых лежат на одной прямой. Прямая на плоскости называется *хорошей*, если данное множество можно разбить на два подмножества A и B таким образом, что сумма расстояний от точек множества A до этой прямой равно сумме расстояний от точек множества B до нее же. Докажите, что на плоскости существует бесконечно много точек, через каждую из которых проходит не менее 2011 хороших прямых.

Двадцать Второй Российский Фестиваль юных математиков

Анапа. 8 октября 2011

Четвертый тур с заменой. Старшая лига

1. В графе n вершин и $m > n(n-1)/4$ ребер. Имеется m графов, получаемых из исходного удалением одного ребра (каждому ребру исходного графа соответствует один граф). Эти графы передали Ласло. Докажите, что он сможет восстановить исходный граф.

2. Дано множество M. Его тремя способами разбили на 12 подмножеств $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant 12}$, $(B_i)_{1\leqslant i\leqslant 12}$, $(C_i)_{1\leqslant i\leqslant 12}$ таким образом, что $|A_i\cap B_j|+|B_j\cap C_k|+|C_k\cap A_i|\geqslant 12$ для всех троек натуральных чисел i, j, k, не превосходящих 12. Какое наименьшее количество элементов могло содержать множество M?

3. Пусть p — простое число. Назовем натуральное n *интересным*, если $x^n-1=(x^p-x+1)f(x)+pg(x)$ для некоторых многочленов f и g с целыми коэффициентами. Для каких p наименьшее интересное число равно p^p-1?

4. Даны окружность ω с центром O и точка T вне ее. Касательные из точки T к окружности ω касаются ее в точках B и C. Окружности ω_1 и ω_2 расположены в треугольнике TBC, касаются окружности ω внешним образом и касаются друг друга в точке J; кроме того, ω_1 касается отрезка TB в точке K, ω_2 касается отрезка TC в точке H. Точка I — центр вписанной окружности треугольника OBC. Докажите, что четырехугольник $BKJI$ вписанный.

5. Найдите все натуральные числа $n>2$, для которых существуют натуральные числа a_1, a_2, …, a_n такие, что числа a_1a_2, a_2a_3, …, $a_{n-1}a_n$, a_na_1 в указанном порядке образуют непостоянную арифметическую прогрессию.

6. Докажите неравенство $\sum\limits_{n=1}^{N}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)<\frac{1}{3}(\ln 2)^3$.

7. Окружности ω_1 и ω_2 касаются окружности ω в точках C и D соответственно, и пересекаются в точках A и B. AM и AN — касательные из A к ω. Оказалось, что точки A, C, D лежат на одной прямой. Докажите, что прямые AB, CM и ND пересекаются в одной точке.

8. Найдите сумму $\sum\limits_{k=1}^{n}(k,n)\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$.

9. Дано положительное число c. Вася задумал число от 1 до M. Петя пытается его угадать, задавая вопросы, ответы на которые — да или нет. Петя дает Васе список из n вопросов (количество вопросов выбирает Петя), потом Вася на них отвечает. Общее количество неверных ответов Васи не должно превосходить cn. При каких c Петя имеет возможность наверняка угадать Васино число?

10. Дано множество из 1000 точек на плоскости, не все из которых лежат на одной прямой. Прямая на плоскости называется *хорошей*, если данное множество можно разбить на два подмножества A и B таким образом, что сумма расстояний от точек множества A до этой прямой равно сумме расстояний от точек множества B до нее же. Докажите, что на плоскости существует бесконечно много точек, через каждую из которых проходит не менее 2011 хороших прямых.