Двадцать Второй Российский Фестиваль юных математиков

Анапа. 8 октября 2011

Четвертый тур с заменой. Младшая лига

1. Другой Костя нарисовал два графа с непересекающимися множествами вершин и обнаружил, что их вершины можно покрасить в 100 цветов *правильным* образом (это значит, что любые две соседние вершины должны быть разного цвета), а в 99 цветов так раскрасить не получается. Потом он провел несколько ребер между вершинами этих графов (концы каждого ребра принадлежат разным графам) и обнаружил, что полученный граф нельзя правильно раскрасить менее чем в 110 цветов. Докажите, что другой Костя провел не менее 1000 ребер.

2. Дано множество M. Его тремя способами разбили на 12 подмножеств $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant 12}$, $(B_i)_{1\leqslant i\leqslant 12}$, $(C_i)_{1\leqslant i\leqslant 12}$ таким образом, что $|A_i\cap B_j|+|B_j\cap C_k|+|C_k\cap A_i|\geqslant 12$ для всех троек натуральных чисел i, j, k, не превосходящих 12. Какое наименьшее количество элементов могло содержать множество M?

3. Можно ли выписать в ряд все натуральные числа, большие 1, так, чтобы любые два соседних числа были не взаимно просты?

4. Две окружности разных радиусов с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A. Общая касательная, не проходящая через точку A, касается окружностей в точках B и C. Серединный перпендикуляр к O_1O_2 пересекает перпендикуляр к BC, проходящий через точку A, в точке F. Докажите, что $2AF=O_1O_2$.

5. Для всех натуральных $n\geqslant 3$ докажите сравнение: $(2^n-3)!!\equiv -1 \pmod{2^{n+1}}$.

6. Пусть a, b и c — числа на отрезке $[2,4]$. Докажите неравенство

$$\frac{c}{a^2b^2+c^2}+\frac{b}{a^2c^2+b^2}+\frac{a}{b^2c^2+a^2}\leqslant\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}.$$

7. Окружности ω_1 и ω_2 касаются окружности ω в точках C и D соответственно, и пересекаются в точках A и B. AM и AN — касательные из A к ω. Оказалось, что точки A, C, D лежат на одной прямой. Докажите, что прямые AB, CM и ND пересекаются в одной точке.

8. Натуральное число $n=m^6-1$ для некоторого натурального $m>10$. Докажите, что для любого простого p и натурального k таких, что n делится на p^k верно, что $p^{3k}<8n$.

Двадцать Второй Российский Фестиваль юных математиков

Анапа. 8 октября 2011

Четвертый тур с заменой. Младшая лига

1. Другой Костя нарисовал два графа с непересекающимися множествами вершин и обнаружил, что их вершины можно покрасить в 100 цветов *правильным* образом (это значит, что любые две соседние вершины должны быть разного цвета), а в 99 цветов так раскрасить не получается. Потом он провел несколько ребер между вершинами этих графов (концы каждого ребра принадлежат разным графам) и обнаружил, что полученный граф нельзя правильно раскрасить менее чем в 110 цветов. Докажите, что другой Костя провел не менее 1000 ребер.

2. Дано множество M. Его тремя способами разбили на 12 подмножеств $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant 12}$, $(B_i)_{1\leqslant i\leqslant 12}$, $(C_i)_{1\leqslant i\leqslant 12}$ таким образом, что $|A_i\cap B_j|+|B_j\cap C_k|+|C_k\cap A_i|\geqslant 12$ для всех троек натуральных чисел i, j, k, не превосходящих 12. Какое наименьшее количество элементов могло содержать множество M?

3. Можно ли выписать в ряд все натуральные числа, большие 1, так, чтобы любые два соседних числа были не взаимно просты?

4. Две окружности разных радиусов с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A. Общая касательная, не проходящая через точку A, касается окружностей в точках B и C. Серединный перпендикуляр к O_1O_2 пересекает перпендикуляр к BC, проходящий через точку A, в точке F. Докажите, что $2AF=O_1O_2$.

5. Для всех натуральных $n\geqslant 3$ докажите сравнение: $(2^n-3)!!\equiv -1 \pmod{2^{n+1}}$.

6. Пусть a, b и c — числа на отрезке $[2,4]$. Докажите неравенство

$$\frac{c}{a^2b^2+c^2}+\frac{b}{a^2c^2+b^2}+\frac{a}{b^2c^2+a^2}\leqslant\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}.$$

7. Окружности ω_1 и ω_2 касаются окружности ω в точках C и D соответственно, и пересекаются в точках A и B. AM и AN — касательные из A к ω. Оказалось, что точки A, C, D лежат на одной прямой. Докажите, что прямые AB, CM и ND пересекаются в одной точке.

8. Натуральное число $n=m^6-1$ для некоторого натурального $m>10$. Докажите, что для любого простого p и натурального k таких, что n делится на p^k верно, что $p^{3k}<8n$.