

1. Другой Костя нарисовал два графа с непересекающимися множествами вершин и обнаружил, что их вершины можно покрасить в 100 цветов *правильным* образом (это значит, что любые две соседние вершины должны быть разного цвета), а в 99 цветов так раскрасить не получается. Потом он провел несколько ребер между вершинами этих графов (концы каждого ребра принадлежат разным графам) и обнаружил, что полученный граф нельзя правильно раскрасить менее чем в 110 цветов. Докажите, что другой Костя провел не менее 1000 ребер.

2. Дано множество  $M$ . Его тремя способами разбили на 12 подмножеств  $(A_i)_{1 \leq i \leq 12}$ ,  $(B_i)_{1 \leq i \leq 12}$ ,  $(C_i)_{1 \leq i \leq 12}$  таким образом, что  $|A_i \cap B_j| + |B_j \cap C_k| + |C_k \cap A_i| \geq 12$  для всех троек натуральных чисел  $i, j, k$ , не превосходящих 12. Какое наименьшее количество элементов могло содержать множество  $M$ ?

3. Можно ли выписать в ряд все натуральные числа, большие 1, так, чтобы любые два соседних числа были не взаимно просты?

4. Две окружности разных радиусов с центрами в точках  $O_1$  и  $O_2$  касаются внешним образом в точке  $A$ . Общая касательная, не проходящая через точку  $A$ , касается окружностей в точках  $B$  и  $C$ . Серединный перпендикуляр к  $O_1O_2$  пересекает перпендикуляр к  $BC$ , проходящий через точку  $A$ , в точке  $F$ . Докажите, что  $2AF = O_1O_2$ .

5. Для всех натуральных  $n \geq 3$  докажите сравнение:  $(2^n - 3)!! \equiv -1 \pmod{2^{n+1}}$ .

6. Пусть  $a, b$  и  $c$  — числа на отрезке  $[2, 4]$ . Докажите неравенство

$$\frac{c}{a^2b^2 + c^2} + \frac{b}{a^2c^2 + b^2} + \frac{a}{b^2c^2 + a^2} \leq \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2}.$$

7. Окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  касаются окружности  $\omega$  в точках  $C$  и  $D$  соответственно, и пересекаются в точках  $A$  и  $B$ .  $AM$  и  $AN$  — касательные из  $A$  к  $\omega$ . Оказалось, что точки  $A, C, D$  лежат на одной прямой. Докажите, что прямые  $AB, CM$  и  $ND$  пересекаются в одной точке.

8. Натуральное число  $n = m^6 - 1$  для некоторого натурального  $m > 10$ . Докажите, что для любого простого  $p$  и натурального  $k$  таких, что  $n$  делится на  $p^k$  верно, что  $p^{3k} < 8n$ .

9. Дано положительное число  $c$ . Вася задумал число от 1 до  $M$ . Петя пытается его угадать, задавая вопросы, ответы на которые — да или нет. Петя дает Васе список из  $n$  вопросов (количество вопросов выбирает Петя), потом Вася на них отвечает. Общее количество неверных ответов Васи не должно превосходить  $cn$ . При каких  $c$  Петя имеет возможность наверняка угадать Васино число?

10. Дано множество из 1000 точек на плоскости, не все из которых лежат на одной прямой. Прямая на плоскости называется *хорошей*, если данное множество можно разбить на два подмножества  $A$  и  $B$  таким образом, что сумма расстояний от точек множества  $A$  до этой прямой равно сумме расстояний от точек множества  $B$  до нее же. Докажите, что на плоскости существует бесконечно много точек, через каждую из которых проходит не менее 2011 хороших прямых.

1. Другой Костя нарисовал два графа с непересекающимися множествами вершин и обнаружил, что их вершины можно покрасить в 100 цветов *правильным* образом (это значит, что любые две соседние вершины должны быть разного цвета), а в 99 цветов так раскрасить не получается. Потом он провел несколько ребер между вершинами этих графов (концы каждого ребра принадлежат разным графам) и обнаружил, что полученный граф нельзя правильно раскрасить менее чем в 110 цветов. Докажите, что другой Костя провел не менее 1000 ребер.

2. Дано множество  $M$ . Его тремя способами разбили на 12 подмножеств  $(A_i)_{1 \leq i \leq 12}$ ,  $(B_i)_{1 \leq i \leq 12}$ ,  $(C_i)_{1 \leq i \leq 12}$  таким образом, что  $|A_i \cap B_j| + |B_j \cap C_k| + |C_k \cap A_i| \geq 12$  для всех троек натуральных чисел  $i, j, k$ , не превосходящих 12. Какое наименьшее количество элементов могло содержать множество  $M$ ?

3. Можно ли выписать в ряд все натуральные числа, большие 1, так, чтобы любые два соседних числа были не взаимно просты?

4. Две окружности разных радиусов с центрами в точках  $O_1$  и  $O_2$  касаются внешним образом в точке  $A$ . Общая касательная, не проходящая через точку  $A$ , касается окружностей в точках  $B$  и  $C$ . Серединный перпендикуляр к  $O_1O_2$  пересекает перпендикуляр к  $BC$ , проходящий через точку  $A$ , в точке  $F$ . Докажите, что  $2AF = O_1O_2$ .

5. Для всех натуральных  $n \geq 3$  докажите сравнение:  $(2^n - 3)!! \equiv -1 \pmod{2^{n+1}}$ .

6. Пусть  $a, b$  и  $c$  — числа на отрезке  $[2, 4]$ . Докажите неравенство

$$\frac{c}{a^2b^2 + c^2} + \frac{b}{a^2c^2 + b^2} + \frac{a}{b^2c^2 + a^2} \leq \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2}.$$

7. Окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  касаются окружности  $\omega$  в точках  $C$  и  $D$  соответственно, и пересекаются в точках  $A$  и  $B$ .  $AM$  и  $AN$  — касательные из  $A$  к  $\omega$ . Оказалось, что точки  $A, C, D$  лежат на одной прямой. Докажите, что прямые  $AB, CM$  и  $ND$  пересекаются в одной точке.

8. Натуральное число  $n = m^6 - 1$  для некоторого натурального  $m > 10$ . Докажите, что для любого простого  $p$  и натурального  $k$  таких, что  $n$  делится на  $p^k$  верно, что  $p^{3k} < 8n$ .

9. Дано положительное число  $c$ . Вася задумал число от 1 до  $M$ . Петя пытается его угадать, задавая вопросы, ответы на которые — да или нет. Петя дает Васе список из  $n$  вопросов (количество вопросов выбирает Петя), потом Вася на них отвечает. Общее количество неверных ответов Васи не должно превосходить  $cn$ . При каких  $c$  Петя имеет возможность наверняка угадать Васино число?

10. Дано множество из 1000 точек на плоскости, не все из которых лежат на одной прямой. Прямая на плоскости называется *хорошей*, если данное множество можно разбить на два подмножества  $A$  и  $B$  таким образом, что сумма расстояний от точек множества  $A$  до этой прямой равно сумме расстояний от точек множества  $B$  до нее же. Докажите, что на плоскости существует бесконечно много точек, через каждую из которых проходит не менее 2011 хороших прямых.