Двадцать Третий Российский Фестиваль юных математиков

Геленджик, 11.10.2012

Младшая лига. Финал.

1. В клетках квадрата 2012×2012 расставлены буквы так, что в каждой строке и каждом столбце не более 100 различных букв. Какое максимальное количество различных букв может быть в расставлено в этом квадрате?

2. Имеется куча, в которой 2012 камней. Двое играют в игру: за ход разрешается взять из кучи от 1 до 5 камней. Однако разрешается делать особенный ход: брать из кучи 6 камней. Всего за игру может быть не более 10 особенных ходов в сумме для обоих игроков. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

3. На плоскости отмечено n точек общего положения, их выпуклая оболочка триангулирована (без добавления дополнительных узлов). Оказалось, что у всех треугольников триангуляции все углы больше 1°. *Картошка* — это выпуклый многоугольник, составленный целиком из треугольников триангуляции. Докажите, что существует не более n^{400} различных картошек.

4. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ таков, что $AB = AC = BD$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Окружности, описанные вокруг треугольников ABC и ADO, вторично пересекаются в точке P. Прямые AP и BC пересекаются в точке Q. Докажите, что $\angle COQ = \angle DOQ$.

5. В остроугольном треугольнике ABC точка M — середина стороны BC. P — произвольная точка внутри треугольника, такая что $\angle CPM = \angle PAB$. Пусть Γ — описанная окружность треугольника ABP. Луч MP пересекает Γ вторично в точке Q, находящейся вне треугольника ABC. Пусть R — точка симметричная P относительно касательной к Γ в точке B. Докажите, что длина отрезка QR не зависит от положения точки P.

6. Докажите, что для любого натурального n среди чисел

$$[2^n\sqrt{2}], \quad [2^{n+1}\sqrt{2}], \quad \ldots, \quad [2^{2n}\sqrt{2}]$$

есть хотя бы одно четное.

7. Даны натуральные числа $k < n$ и положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Докажите неравенство

$$\frac{x_1}{x_2+x_3+\ldots+x_{k+1}} + \frac{x_2}{x_3+x_4+\ldots+x_{k+2}} + \ldots + \frac{x_n}{x_1+x_2+\ldots+x_k} \geqslant \frac{n}{k^2}.$$

8. Натуральные числа a и n таковы, что все простые делители числа a больше n. Докажите, что $(a-1)(a^2-1)\ldots(a^{n-1}-1)$ делится на $n!$.

9. Граф G с 100 вершинами обладает следующим свойством: при удалении из G любых 49 вершин в оставшемся графе содержится цикл. Какое наименьшее количество ребер может быть в графе G?

10. Последовательность положительных вещественных чисел $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, a_3, a_4, … при всех m, $n \in \mathbb{N}$ и некотором $C > 1$ удовлетворяет условиям

$$a_{mn} = a_m a_n \quad \text{и} \quad a_{m+n} \leqslant C(a_m + a_n).$$

Докажите, что $a_n = n$.

Двадцать Третий Российский Фестиваль юных математиков

Геленджик, 11.10.2012

Младшая лига. Финал.

1. В клетках квадрата 2012×2012 расставлены буквы так, что в каждой строке и каждом столбце не более 100 различных букв. Какое максимальное количество различных букв может быть в расставлено в этом квадрате?

2. Имеется куча, в которой 2012 камней. Двое играют в игру: за ход разрешается взять из кучи от 1 до 5 камней. Однако разрешается делать особенный ход: брать из кучи 6 камней. Всего за игру может быть не более 10 особенных ходов в сумме для обоих игроков. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

3. На плоскости отмечено n точек общего положения, их выпуклая оболочка триангулирована (без добавления дополнительных узлов). Оказалось, что у всех треугольников триангуляции все углы больше 1°. *Картошка* — это выпуклый многоугольник, составленный целиком из треугольников триангуляции. Докажите, что существует не более n^{400} различных картошек.

4. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ таков, что $AB = AC = BD$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Окружности, описанные вокруг треугольников ABC и ADO, вторично пересекаются в точке P. Прямые AP и BC пересекаются в точке Q. Докажите, что $\angle COQ = \angle DOQ$.

5. В остроугольном треугольнике ABC точка M — середина стороны BC. P — произвольная точка внутри треугольника, такая что $\angle CPM = \angle PAB$. Пусть Γ — описанная окружность треугольника ABP. Луч MP пересекает Γ вторично в точке Q, находящейся вне треугольника ABC. Пусть R — точка симметричная P относительно касательной к Γ в точке B. Докажите, что длина отрезка QR не зависит от положения точки P.

6. Докажите, что для любого натурального n среди чисел

$$[2^n\sqrt{2}], \quad [2^{n+1}\sqrt{2}], \quad \ldots, \quad [2^{2n}\sqrt{2}]$$

есть хотя бы одно четное.

7. Даны натуральные числа $k < n$ и положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Докажите неравенство

$$\frac{x_1}{x_2+x_3+\ldots+x_{k+1}} + \frac{x_2}{x_3+x_4+\ldots+x_{k+2}} + \ldots + \frac{x_n}{x_1+x_2+\ldots+x_k} \geqslant \frac{n}{k^2}.$$

8. Натуральные числа a и n таковы, что все простые делители числа a больше n. Докажите, что $(a-1)(a^2-1)\ldots(a^{n-1}-1)$ делится на $n!$.

9. Граф G с 100 вершинами обладает следующим свойством: при удалении из G любых 49 вершин в оставшемся графе содержится цикл. Какое наименьшее количество ребер может быть в графе G?

10. Последовательность положительных вещественных чисел $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, a_3, a_4, … при всех m, $n \in \mathbb{N}$ и некотором $C > 1$ удовлетворяет условиям

$$a_{mn} = a_m a_n \quad \text{и} \quad a_{m+n} \leqslant C(a_m + a_n).$$

Докажите, что $a_n = n$.