**Двадцать Третий Российский Фестиваль юных математиков**

*Геленджик, 11.10.2012*

*Старшая лига. Финал.*

**1.** Даны натуральные числа $n$ и $k \leqslant n$. В клетках таблицы $n \times n$ расставлены значки так, что в каждой строчке не более $k$ различных значков, и в каждом столбце не более $k$ различных значков. Каково наибольшее возможное количество различных значков в этой таблице?

**2.** На стороне $AB$ треугольника $ABC$ выбраны точки $C_1$ и $C_2$, на стороне $BC$ — точки $A_1$ и $A_2$ и на стороне $CA$ — точки $B_1$ и $B_2$ таким образом, что $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ — вписанный шестиугольник. Отрезки $C_1A_2$ и $A_1B_2$ пересекаются в точке $A_3$, аналогичным образом определяются точки $B_3$ и $C_3$. Оказалось, что четырехугольники $AC_1A_3B_2$ и $BA_1B_3C_2$ — описанные. Докажите, что четырёхугольник $CB_1C_3A_2$ тоже описанный.

**3.** На прямой выбрано несколько отрезков так, что среди выбранных отрезков нет ни одной пары $[a,b]$ и $[c,d]$, таких что $a < c < b < d$. Докажите, что можно покрасить все отрезки в три цвета так, чтобы никакие два отрезка вида $[a,b]$, $[b,c]$ $(a < b < c)$ не были покрашены в одинаковый цвет.

**4.** Конечно ли количество таких натуральных $n$, для которых $(n!+1)$ делит $(2012n)!$? Здесь восклицательный знак обозначает факториал, а вопросительный знак — вопрос. Понятно!?

**5.** При каком наибольшем $\lambda$ в произвольном выпуклом четырёхугольнике площади 1 можно заведомо выбрать такие 4 точки внутри или на сторонах, чтобы все треугольники с вершинами в выбранных точках имели площадь не меньше $\lambda$?

**6.** В треугольнике $ABC$ угол $B$ тупой, а точки $H$ и $I$ — его ортоцентр и центр вписанной окружности соответственно. Докажите, что $HI \leqslant \frac{4S(AHC)}{P(ABC)}$.

**7.** Существует ли такое натуральное число $n > 5$, что $3^n+5^n$ делится на $n^2-25$?

**8.** Даны натуральные числа $k < n$ и положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Докажите неравенство

$$\frac{x_1}{x_2+x_3+\ldots+x_{k+1}} + \frac{x_2}{x_3+x_4+\ldots+x_{k+2}} + \ldots + \frac{x_n}{x_1+x_2+\ldots+x_k} \geqslant \frac{n}{k^2}$$

**9.** Фокусник и его помощник заходят на заседание круглого стола «Наука и волшебство», где за круглым столом сидит $n$ человек. Они о чем-то тихо советуются, после чего фокусник выходит из зала. Помощник объявляет, что сейчас будет продемонстрирован фокус. Участники заседания пересаживаются в произвольном порядке, после чего один из них выходит из-за стола. Помощник просит одного из двух его соседей тоже покинуть свое место. После чего в зал возвращается фокусник, смотрит на двух стоящих людей (и $(n-2)$ сидящих) и говорит, в каком порядке сидели эти двое до того, как покинуть свои места. При каких $n$ может быть показан такой фокус?

**10.** Найдите все функции $f\colon (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ такие, что при всех положительных $x$ и $y$

$$f(xy) = f\left(\frac{x+y}{f(y)}\right) + f\left(\frac{x+y}{f(x)}\right).$$

**Двадцать Третий Российский Фестиваль юных математиков**

*Геленджик, 11.10.2012*

*Старшая лига. Финал.*

**1.** Даны натуральные числа $n$ и $k \leqslant n$. В клетках таблицы $n \times n$ расставлены значки так, что в каждой строчке не более $k$ различных значков, и в каждом столбце не более $k$ различных значков. Каково наибольшее возможное количество различных значков в этой таблице?

**2.** На стороне $AB$ треугольника $ABC$ выбраны точки $C_1$ и $C_2$, на стороне $BC$ — точки $A_1$ и $A_2$ и на стороне $CA$ — точки $B_1$ и $B_2$ таким образом, что $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ — вписанный шестиугольник. Отрезки $C_1A_2$ и $A_1B_2$ пересекаются в точке $A_3$, аналогичным образом определяются точки $B_3$ и $C_3$. Оказалось, что четырехугольники $AC_1A_3B_2$ и $BA_1B_3C_2$ — описанные. Докажите, что четырёхугольник $CB_1C_3A_2$ тоже описанный.

**3.** На прямой выбрано несколько отрезков так, что среди выбранных отрезков нет ни одной пары $[a,b]$ и $[c,d]$, таких что $a < c < b < d$. Докажите, что можно покрасить все отрезки в три цвета так, чтобы никакие два отрезка вида $[a,b]$, $[b,c]$ $(a < b < c)$ не были покрашены в одинаковый цвет.

**4.** Конечно ли количество таких натуральных $n$, для которых $(n!+1)$ делит $(2012n)!$? Здесь восклицательный знак обозначает факториал, а вопросительный знак — вопрос. Понятно!?

**5.** При каком наибольшем $\lambda$ в произвольном выпуклом четырёхугольнике площади 1 можно заведомо выбрать такие 4 точки внутри или на сторонах, чтобы все треугольники с вершинами в выбранных точках имели площадь не меньше $\lambda$?

**6.** В треугольнике $ABC$ угол $B$ тупой, а точки $H$ и $I$ — его ортоцентр и центр вписанной окружности соответственно. Докажите, что $HI \leqslant \frac{4S(AHC)}{P(ABC)}$.

**7.** Существует ли такое натуральное число $n > 5$, что $3^n+5^n$ делится на $n^2-25$?

**8.** Даны натуральные числа $k < n$ и положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Докажите неравенство

$$\frac{x_1}{x_2+x_3+\ldots+x_{k+1}} + \frac{x_2}{x_3+x_4+\ldots+x_{k+2}} + \ldots + \frac{x_n}{x_1+x_2+\ldots+x_k} \geqslant \frac{n}{k^2}$$

**9.** Фокусник и его помощник заходят на заседание круглого стола «Наука и волшебство», где за круглым столом сидит $n$ человек. Они о чем-то тихо советуются, после чего фокусник выходит из зала. Помощник объявляет, что сейчас будет продемонстрирован фокус. Участники заседания пересаживаются в произвольном порядке, после чего один из них выходит из-за стола. Помощник просит одного из двух его соседей тоже покинуть свое место. После чего в зал возвращается фокусник, смотрит на двух стоящих людей (и $(n-2)$ сидящих) и говорит, в каком порядке сидели эти двое до того, как покинуть свои места. При каких $n$ может быть показан такой фокус?

**10.** Найдите все функции $f\colon (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ такие, что при всех положительных $x$ и $y$

$$f(xy) = f\left(\frac{x+y}{f(y)}\right) + f\left(\frac{x+y}{f(x)}\right).$$