Двадцать Третий Российский Фестиваль юных математиков

Геленджик, 6.10.2012

Младшая лига. Первый тур.

1. В русском алфавите 33 буквы. Можно ли расположить вдоль окружности несколько букв так, чтобы среди любых 11 букв подряд все буквы были бы различными и при этом любое множество из различных 11 букв встречалось бы ровно один раз?

2. Найдите все такие простые числа p, что ни при каком натуральном n число $n^{n+1}+(n+1)^n$ не делится на p.

3. Докажите, что при вещественных $x>0$ выполнено неравенство

$$3^{x^5}+9^{x^4}+3^{32}\geqslant 3^{4x^3+1}.$$

4. В ряд выписаны числа от 1 до 13. Можно ли выписать под ними еще раз числа от 1 до 13 в некотором порядке так, чтобы сумма чисел в каждом столбце оказалась точным квадратом?

5. Через вершину A треугольника ABC проведена прямая, параллельная BC. На этой прямой выбрана точка D таким образом, что $AD=AB+AC$. Отрезки BD и AC пересекаются в точке F. Докажите, что прямая, проходящая через точку F параллельно BC, проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

6. Имеется куча с $3N$ камнями. Двое играют в игру: за ход разрешается выбрать одну из имеющихся куч камней и разбить ее на две или на три равные кучи, если это возможно. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. При каких N выигрывает первый игрок?

7. Найдите площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$, если известно, что $\angle A=60^\circ$, $AB=AD$, $BC+CD=AC=1$.

8. Назовем натуральное число *сбалансированным*, если число его различных простых делителей в 2012 раз меньше количества цифр в его десятичной записи. Докажите, что существует лишь конечное число сбалансированных чисел.

9. Вещественные числа a и b таковы, что трехчлены $x^2+2ax+b^2$ и $x^2+2bx+a^2$ имеют общий корень. Докажите, что $a=b$.

10. В графе степени всех вершин не превосходят 11. Докажите, что ребра этого графа можно раскрасить в 221 цвет таким образом, чтобы концы ребер каждого цвета не совпадали и были не смежны.

Двадцать Третий Российский Фестиваль юных математиков

Геленджик, 6.10.2012

Младшая лига. Первый тур.

1. В русском алфавите 33 буквы. Можно ли расположить вдоль окружности несколько букв так, чтобы среди любых 11 букв подряд все буквы были бы различными и при этом любое множество из различных 11 букв встречалось бы ровно один раз?

2. Найдите все такие простые числа p, что ни при каком натуральном n число $n^{n+1}+(n+1)^n$ не делится на p.

3. Докажите, что при вещественных $x>0$ выполнено неравенство

$$3^{x^5}+9^{x^4}+3^{32}\geqslant 3^{4x^3+1}.$$

4. В ряд выписаны числа от 1 до 13. Можно ли выписать под ними еще раз числа от 1 до 13 в некотором порядке так, чтобы сумма чисел в каждом столбце оказалась точным квадратом?

5. Через вершину A треугольника ABC проведена прямая, параллельная BC. На этой прямой выбрана точка D таким образом, что $AD=AB+AC$. Отрезки BD и AC пересекаются в точке F. Докажите, что прямая, проходящая через точку F параллельно BC, проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

6. Имеется куча с $3N$ камнями. Двое играют в игру: за ход разрешается выбрать одну из имеющихся куч камней и разбить ее на две или на три равные кучи, если это возможно. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. При каких N выигрывает первый игрок?

7. Найдите площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$, если известно, что $\angle A=60^\circ$, $AB=AD$, $BC+CD=AC=1$.

8. Назовем натуральное число *сбалансированным*, если число его различных простых делителей в 2012 раз меньше количества цифр в его десятичной записи. Докажите, что существует лишь конечное число сбалансированных чисел.

9. Вещественные числа a и b таковы, что трехчлены $x^2+2ax+b^2$ и $x^2+2bx+a^2$ имеют общий корень. Докажите, что $a=b$.

10. В графе степени всех вершин не превосходят 11. Докажите, что ребра этого графа можно раскрасить в 221 цвет таким образом, чтобы концы ребер каждого цвета не совпадали и были не смежны.