Двадцать Третий Российский Фестиваль юных математиков

Геленджик, 6.10.2012

Старшая лига. Первый тур.

1. В русском алфавите 33 буквы. Можно ли расположить вдоль окружности несколько букв так, чтобы среди любых 11 букв подряд все буквы были бы различными и при этом любое множество из различных 11 букв встречалось бы ровно один раз?

2. Найдите все такие простые числа p, что ни при каком натуральном n число $n^{n+1}+(n+1)^n$ не делится на p.

3. Вписанная окружность касается сторон AB, BC, CA треугольника ABC в точках F, D, E соответственно. Прямая EF пересекает прямую BC в точке P, а среднюю линию треугольника ABC, параллельную BC, в точке Q. Медиана из вершины Q треугольника DQP пересекает вписанную окружность ABC в точке R. Докажите, что $\angle BRC = 90°$.

4. Через вершину A треугольника ABC проведена прямая, параллельная BC. На этой прямой выбрана точка D так, что $AD = AB + AC$. Отрезки BD и AC пересекаются в точке F. Докажите, что прямая, проходящая через точку F параллельно BC, проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

5. Докажите, что при вещественных $x > 0$ выполнено неравенство

$$3^{x^5}+9^{x^4}+3^{32} \geqslant 3^{4x^3+1}.$$

6. Дано натуральное число $n > 1$. На координатной плоскости расположен выпуклый многоугольник площади n, у которого координаты всех вершин положительны и меньше n. Докажите, что этот многоугольник содержит целую точку.

7. Даны простое число p и натуральные числа $n_1, n_2, \ldots n_p$. Докажите, что многочлен $\dfrac{x^{n_1}+x^{n_2}+\ldots+x^{n_p}-p}{x^{\text{НОД}(n_1,n_2\ldots n_p)}-1}$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

8. Докажите, что существует бесконечно много пар натуральных чисел (a, b) таких, что $ab+1$ делится на $a+b$; $ab-1$ делится на $a-b$ и при этом $a > \sqrt{3}b-1$.

9. Имеется куча из N камней. Двое играют в игру: за ход разрешается выбрать одну из имеющихся куч камней и разбить ее на 3, 4 или 5 равных куч, если это возможно. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. При каких N выигрывает первый игрок?

10. В графе степени всех вершин не превосходят 11. Докажите, что ребра этого графа можно раскрасить в 221 цвет таким образом, чтобы концы ребер каждого цвета не совпадали и были не смежны.

Двадцать Третий Российский Фестиваль юных математиков

Геленджик, 6.10.2012

Старшая лига. Первый тур.

1. В русском алфавите 33 буквы. Можно ли расположить вдоль окружности несколько букв так, чтобы среди любых 11 букв подряд все буквы были бы различными и при этом любое множество из различных 11 букв встречалось бы ровно один раз?

2. Найдите все такие простые числа p, что ни при каком натуральном n число $n^{n+1}+(n+1)^n$ не делится на p.

3. Вписанная окружность касается сторон AB, BC, CA треугольника ABC в точках F, D, E соответственно. Прямая EF пересекает прямую BC в точке P, а среднюю линию треугольника ABC, параллельную BC, в точке Q. Медиана из вершины Q треугольника DQP пересекает вписанную окружность ABC в точке R. Докажите, что $\angle BRC = 90°$.

4. Через вершину A треугольника ABC проведена прямая, параллельная BC. На этой прямой выбрана точка D так, что $AD = AB + AC$. Отрезки BD и AC пересекаются в точке F. Докажите, что прямая, проходящая через точку F параллельно BC, проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

5. Докажите, что при вещественных $x > 0$ выполнено неравенство

$$3^{x^5}+9^{x^4}+3^{32} \geqslant 3^{4x^3+1}.$$

6. Дано натуральное число $n > 1$. На координатной плоскости расположен выпуклый многоугольник площади n, у которого координаты всех вершин положительны и меньше n. Докажите, что этот многоугольник содержит целую точку.

7. Даны простое число p и натуральные числа $n_1, n_2, \ldots n_p$. Докажите, что многочлен $\dfrac{x^{n_1}+x^{n_2}+\ldots+x^{n_p}-p}{x^{\text{НОД}(n_1,n_2\ldots n_p)}-1}$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

8. Докажите, что существует бесконечно много пар натуральных чисел (a, b) таких, что $ab+1$ делится на $a+b$; $ab-1$ делится на $a-b$ и при этом $a > \sqrt{3}b-1$.

9. Имеется куча из N камней. Двое играют в игру: за ход разрешается выбрать одну из имеющихся куч камней и разбить ее на 3, 4 или 5 равных куч, если это возможно. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. При каких N выигрывает первый игрок?

10. В графе степени всех вершин не превосходят 11. Докажите, что ребра этого графа можно раскрасить в 221 цвет таким образом, чтобы концы ребер каждого цвета не совпадали и были не смежны.