Двадцать Третий Российский Фестиваль юных математиков

Геленджик, 7.10.2012

Младшая лига. Второй тур.

1. В ряд стоят 100 мальчиков и 100 девочек. Каждый ребенок подсчитал, сколько детей противоположного пола стоит слева и справа от него (не обязательно рядом), и перемножил эти два числа. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех двухсот результатов?

2. Какую наибольшую длину может иметь отрезок натурального ряда, в котором поровну чисел, делящихся на 2012 и 2013?

3. Пусть p — простое число. Дано множество A, содержащее не менее p элементов. Назовем *p-семейством* множество, состоящее из попарно непересекающихся p-элементных подмножеств A. Докажите, что разность количества p-семейств, содержащих четное число подмножеств, и количества p-семейств, содержащих нечетное число подмножеств, делится на p.

4. В графе с 2^n вершинами ($n > 2$) выбрано $2^n - n$ полных подграфов попарно различных размеров. Докажите, что к одному из этих подграфов можно добавить вершину так, чтобы он остался полным.

5. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC угол A равен 60°. Точки O и I — центры описанной и вписанной окружности треугольника ABC соответственно. Докажите, что прямые OI, BC и серединный перпендикуляр к отрезку AI пересекаются в одной точке.

6. Пусть a и b — взаимно простые целые числа. Возможно ли, что для некоторых различных натуральных n и k, больших единицы, выполняется равенство

$$(a+b\sqrt{2}\,)^n = (b+a\sqrt{2}\,)^k \ ?$$

7. Последовательность a_1, a_2, a_3, $\ldots$ натуральных чисел удовлетворяет соотношению

$$a_n = a_{n+1}a_{n-1} - 1 \qquad \text{при } n \geqslant 2\,.$$

Найдите все такие последовательности.

8. Радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника ABC равны r и R соответственно. Внутри треугольника выбрана точка P. Прямые AP и BP пересекают описанную окружность ABC в точках A' и B'. Докажите, что $\frac{A'B'}{PC} \leqslant \frac{R}{r}$.

9. Пусть p — простое число и $k > 1$ — натуральное число. Докажите, что уравнение $x^k + px = y^k$ имеет не больше одного решения (x, y), в котором оба числа x и y — натуральные.

10. Можно ли в клетчатом квадрате 103×103 отметить 103 клетки так, чтобы в каждом столбце и в каждой строке было по одной отмеченной клетке и чтобы при сгибании квадрата по диагонали никакие две отмеченные клетки не оказались на одной диагонали, параллельной линии сгиба?

Двадцать Третий Российский Фестиваль юных математиков

Геленджик, 7.10.2012

Младшая лига. Второй тур.

1. В ряд стоят 100 мальчиков и 100 девочек. Каждый ребенок подсчитал, сколько детей противоположного пола стоит слева и справа от него (не обязательно рядом), и перемножил эти два числа. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех двухсот результатов?

2. Какую наибольшую длину может иметь отрезок натурального ряда, в котором поровну чисел, делящихся на 2012 и 2013?

3. Пусть p — простое число. Дано множество A, содержащее не менее p элементов. Назовем *p-семейством* множество, состоящее из попарно непересекающихся p-элементных подмножеств A. Докажите, что разность количества p-семейств, содержащих четное число подмножеств, и количества p-семейств, содержащих нечетное число подмножеств, делится на p.

4. В графе с 2^n вершинами ($n > 2$) выбрано $2^n - n$ полных подграфов попарно различных размеров. Докажите, что к одному из этих подграфов можно добавить вершину так, чтобы он остался полным.

5. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC угол A равен 60°. Точки O и I — центры описанной и вписанной окружности треугольника ABC соответственно. Докажите, что прямые OI, BC и серединный перпендикуляр к отрезку AI пересекаются в одной точке.

6. Пусть a и b — взаимно простые целые числа. Возможно ли, что для некоторых различных натуральных n и k, больших единицы, выполняется равенство

$$(a+b\sqrt{2}\,)^n = (b+a\sqrt{2}\,)^k \ ?$$

7. Последовательность a_1, a_2, a_3, $\ldots$ натуральных чисел удовлетворяет соотношению

$$a_n = a_{n+1}a_{n-1} - 1 \qquad \text{при } n \geqslant 2\,.$$

Найдите все такие последовательности.

8. Радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника ABC равны r и R соответственно. Внутри треугольника выбрана точка P. Прямые AP и BP пересекают описанную окружность ABC в точках A' и B'. Докажите, что $\frac{A'B'}{PC} \leqslant \frac{R}{r}$.

9. Пусть p — простое число и $k > 1$ — натуральное число. Докажите, что уравнение $x^k + px = y^k$ имеет не больше одного решения (x, y), в котором оба числа x и y — натуральные.

10. Можно ли в клетчатом квадрате 103×103 отметить 103 клетки так, чтобы в каждом столбце и в каждой строке было по одной отмеченной клетке и чтобы при сгибании квадрата по диагонали никакие две отмеченные клетки не оказались на одной диагонали, параллельной линии сгиба?