Двадцать Третий Российский Фестиваль юных математиков

Геленджик, 7.10.2012

Старшая лига. Второй тур.

1. Найдите все функции $f\colon (0,+\infty)\to(0,+\infty)$, такие что $f(x+f(y))=yf(xy+1)$.

2. В клетках квадрата 99×99 расставлены попарно различные вещественные числа. Клетчатый прямоугольник, лежащий в этом квадрате, называется *шельфом*, если каждое число в этом прямоугольнике меньше каждого числа, стоящего в клетке, граничащей с этим прямоугольником по стороне или углу. Найдите наибольшее возможное число шельфов.

3. Пусть p — простое число. Дано множество A, содержащее не менее p элементов. Назовем *p-семейством* множество, состоящее из попарно непересекающихся p-элементных подмножеств A. Докажите, что разность количества p-семейств, содержащих четное число подмножеств, и количества p-семейств, содержащих нечетное число подмножеств, делится на p.

4. В графе с 2^n вершинами ($n>2$) выбрано 2^n-n полных подграфов попарно различных размеров. Докажите, что к одному из этих подграфов можно добавить вершину так, чтобы он остался полным.

5. Прямая ℓ проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC. Точки A', B', C' симметричны точкам A, B, C относительно ℓ соответственно. Прямые, проходящие через A', B', C' параллельно ℓ, пересекают прямые BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на прямой, касающейся вписанной окружности ABC.

6. Дан прямой круговой конус с вершиной O и точка P в плоскости его основания. Через точку P провели прямую ℓ, пересекающую окружность основания в точках X и Y. Докажите, что величина $\operatorname{tg}\frac{\angle POX}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\angle POY}{2}$ не зависит от выбора прямой ℓ.

7. Для положительных чисел a, b, c и p докажите неравенство

$$\frac{a^3b}{(3a+b)^p}+\frac{b^3c}{(3b+c)^p}+\frac{c^3a}{(3c+a)^p}\geqslant\frac{a^2bc}{(2a+b+c)^p}+\frac{b^2ca}{(2b+c+a)^p}+\frac{c^2ab}{(2c+a+b)^p}.$$

8. Радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника ABC равны r и R соответственно. Внутри треугольника выбрана точка P. Прямые AP и BP пересекают описанную окружность ABC в точках A' и B'. Докажите, что $\frac{A'B'}{PC}\leqslant\frac{R}{r}$.

9. Множество натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, не превосходящих 2^n, назовем *хорошим*, если суммы элементов всех его подмножеств различны по модулю 2^n (сумму пустого подмножества считаем равной 0). Сколько существует хороших множеств?

10. Непостоянные многочлены $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_k(x)$ таковы, что

$$f_1(f_2(x))=f_2(f_3(x))=\ldots=f_{k-1}(f_k(x))=f_k(f_1(x)).$$

Докажите, что если k нечетно, то все многочлены $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_k(x)$ равны.

Двадцать Третий Российский Фестиваль юных математиков

Геленджик, 7.10.2012

Старшая лига. Второй тур.

1. Найдите все функции $f\colon (0,+\infty)\to(0,+\infty)$, такие что $f(x+f(y))=yf(xy+1)$.

2. В клетках квадрата 99×99 расставлены попарно различные вещественные числа. Клетчатый прямоугольник, лежащий в этом квадрате, называется *шельфом*, если каждое число в этом прямоугольнике меньше каждого числа, стоящего в клетке, граничащей с этим прямоугольником по стороне или углу. Найдите наибольшее возможное число шельфов.

3. Пусть p — простое число. Дано множество A, содержащее не менее p элементов. Назовем *p-семейством* множество, состоящее из попарно непересекающихся p-элементных подмножеств A. Докажите, что разность количества p-семейств, содержащих четное число подмножеств, и количества p-семейств, содержащих нечетное число подмножеств, делится на p.

4. В графе с 2^n вершинами ($n>2$) выбрано 2^n-n полных подграфов попарно различных размеров. Докажите, что к одному из этих подграфов можно добавить вершину так, чтобы он остался полным.

5. Прямая ℓ проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC. Точки A', B', C' симметричны точкам A, B, C относительно ℓ соответственно. Прямые, проходящие через A', B', C' параллельно ℓ, пересекают прямые BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на прямой, касающейся вписанной окружности ABC.

6. Дан прямой круговой конус с вершиной O и точка P в плоскости его основания. Через точку P провели прямую ℓ, пересекающую окружность основания в точках X и Y. Докажите, что величина $\operatorname{tg}\frac{\angle POX}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\angle POY}{2}$ не зависит от выбора прямой ℓ.

7. Для положительных чисел a, b, c и p докажите неравенство

$$\frac{a^3b}{(3a+b)^p}+\frac{b^3c}{(3b+c)^p}+\frac{c^3a}{(3c+a)^p}\geqslant\frac{a^2bc}{(2a+b+c)^p}+\frac{b^2ca}{(2b+c+a)^p}+\frac{c^2ab}{(2c+a+b)^p}.$$

8. Радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника ABC равны r и R соответственно. Внутри треугольника выбрана точка P. Прямые AP и BP пересекают описанную окружность ABC в точках A' и B'. Докажите, что $\frac{A'B'}{PC}\leqslant\frac{R}{r}$.

9. Множество натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, не превосходящих 2^n, назовем *хорошим*, если суммы элементов всех его подмножеств различны по модулю 2^n (сумму пустого подмножества считаем равной 0). Сколько существует хороших множеств?

10. Непостоянные многочлены $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_k(x)$ таковы, что

$$f_1(f_2(x))=f_2(f_3(x))=\ldots=f_{k-1}(f_k(x))=f_k(f_1(x)).$$

Докажите, что если k нечетно, то все многочлены $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_k(x)$ равны.