Двадцать Третий Российский Фестиваль юных математиков

Геленджик, 9.10.2012

Младшая лига. Третий тур.

1. Рассмотрим все слова длины 100, состоящие их букв A, B, C. Пусть среди них ровно a слов, содержащих как четное число фрагментов AB, так и четное число фрагментов AC. Пусть среди них ровно b слов, содержащих как нечетное число фрагментов AB, так и нечетное число фрагментов AC. Чему равно $a-b$?

2. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Прямая, проходящая через вершину A параллельно стороне BC, пересекает биссектрисы внешних углов B и C в точках P и Q соответственно. Прямые, проходящие через точки P и Q параллельно биссектрисам внутренних углов B и C соответственно, пересекаются в точке R. Докажите, что $AI = AR$.

3. Натуральные числа a, b, c, d таковы, что число $a^2 - b^2 + c^2 - d^2$ нечетно и делится на $a - b + c - d$. Докажите, что для любого натурального числа n число $a^n - b^n + c^n - d^n$ делится на $a - b + c - d$.

4. Есть три кучи: 2012, 2013 и 2014 камней. Двое играют в игру. Ход состоит в том, что игрок откидывает две кучи, а оставшуюся делит на три непустые части. Выигрывает тот, кто НЕ может сделать ход. Кто выиграет?

5. Последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots$ и $y_1, y_2, y_3, \ldots$ натуральных чисел таковы, что $y_{n+1}/x_{n+1} > y_n/x_n$ для всех натуральных n. Докажите, что для бесконечно многих значений n выполняется неравенство $y_n > \sqrt{n}$.

6. В $\triangle ABC$ угол B равен 60°. На стороне AC выбрана точка M, а на стороне AB — точка D так, что $\angle BCA = 2\angle MBC$ и $BD = MC$. Найдите $\angle DMB$.

7. На доске нарисованы красная, синяя и зеленая точки, образующие остроугольный неравнобедренный треугольник. Вася накладывает на доску бесконечный прозрачный лист и красит каждую точку листа в цвет ближайшей к ней отмеченной точки (если таковых несколько, точка не окрашивается). Петя накладывает на доску другой бесконечный прозрачный лист и красит каждую точку листа в цвет наиболее удаленной от нее отмеченной точки (если таковых несколько, точка не окрашивается). Докажите, что покрасив листы, Вася и Петя получат одинаковые картинки.

8. Найдите все квадратные трехчлены $f(x)$ с вещественными коэффициентами, для которых $f(11) = 181$ и которые при всех $x \in \mathbb{R}$ удовлетворяют неравенству $x^2 - 2x + 2 \leqslant f(x) \leqslant 2x^2 - 4x + 3$.

9. В однокруговом турнире по волейболу участвовали $n > 4$ команд. Набор команд A_1, A_2, …, A_k назовем *нетранзитивным*, если A_1 выиграла у A_2, A_2 выиграла у A_3, …, A_k выиграла у A_1. По окончании турнира выяснилось, что нет ни одной нетранзитивной четверки команд. Какое наибольшее количество нетранзитивных троек команд может быть в таком турнире?

10. К натуральному числу n прибавляют последнюю цифру, затем к полученному результату прибавляют его последнюю цифру и т.д. Докажите, что если n не делится на 5, то эта последовательность содержит хотя бы одну степень двойки.

Двадцать Третий Российский Фестиваль юных математиков

Геленджик, 9.10.2012

Младшая лига. Третий тур.

1. Рассмотрим все слова длины 100, состоящие их букв A, B, C. Пусть среди них ровно a слов, содержащих как четное число фрагментов AB, так и четное число фрагментов AC. Пусть среди них ровно b слов, содержащих как нечетное число фрагментов AB, так и нечетное число фрагментов AC. Чему равно $a-b$?

2. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Прямая, проходящая через вершину A параллельно стороне BC, пересекает биссектрисы внешних углов B и C в точках P и Q соответственно. Прямые, проходящие через точки P и Q параллельно биссектрисам внутренних углов B и C соответственно, пересекаются в точке R. Докажите, что $AI = AR$.

3. Натуральные числа a, b, c, d таковы, что число $a^2 - b^2 + c^2 - d^2$ нечетно и делится на $a - b + c - d$. Докажите, что для любого натурального числа n число $a^n - b^n + c^n - d^n$ делится на $a - b + c - d$.

4. Есть три кучи: 2012, 2013 и 2014 камней. Двое играют в игру. Ход состоит в том, что игрок откидывает две кучи, а оставшуюся делит на три непустые части. Выигрывает тот, кто НЕ может сделать ход. Кто выиграет?

5. Последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots$ и $y_1, y_2, y_3, \ldots$ натуральных чисел таковы, что $y_{n+1}/x_{n+1} > y_n/x_n$ для всех натуральных n. Докажите, что для бесконечно многих значений n выполняется неравенство $y_n > \sqrt{n}$.

6. В $\triangle ABC$ угол B равен 60°. На стороне AC выбрана точка M, а на стороне AB — точка D так, что $\angle BCA = 2\angle MBC$ и $BD = MC$. Найдите $\angle DMB$.

7. На доске нарисованы красная, синяя и зеленая точки, образующие остроугольный неравнобедренный треугольник. Вася накладывает на доску бесконечный прозрачный лист и красит каждую точку листа в цвет ближайшей к ней отмеченной точки (если таковых несколько, точка не окрашивается). Петя накладывает на доску другой бесконечный прозрачный лист и красит каждую точку листа в цвет наиболее удаленной от нее отмеченной точки (если таковых несколько, точка не окрашивается). Докажите, что покрасив листы, Вася и Петя получат одинаковые картинки.

8. Найдите все квадратные трехчлены $f(x)$ с вещественными коэффициентами, для которых $f(11) = 181$ и которые при всех $x \in \mathbb{R}$ удовлетворяют неравенству $x^2 - 2x + 2 \leqslant f(x) \leqslant 2x^2 - 4x + 3$.

9. В однокруговом турнире по волейболу участвовали $n > 4$ команд. Набор команд A_1, A_2, …, A_k назовем *нетранзитивным*, если A_1 выиграла у A_2, A_2 выиграла у A_3, …, A_k выиграла у A_1. По окончании турнира выяснилось, что нет ни одной нетранзитивной четверки команд. Какое наибольшее количество нетранзитивных троек команд может быть в таком турнире?

10. К натуральному числу n прибавляют последнюю цифру, затем к полученному результату прибавляют его последнюю цифру и т.д. Докажите, что если n не делится на 5, то эта последовательность содержит хотя бы одну степень двойки.