Двадцать Третий Российский Фестиваль юных математиков

Геленджик, 9.10.2012

Старшая лига. Третий тур.

1. Рассмотрим все слова длины 100, состоящие их букв A, B, C. Пусть среди них ровно a слов, содержащих как четное число фрагментов AB, так и четное число фрагментов AC. Пусть среди них ровно b слов, содержащих как нечетное число фрагментов AB, так и нечетное число фрагментов AC. Чему равно $a-b$?

2. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон BC, CA, AB в точках D, E, F соответственно. Прямая, проходящая через D перпендиклярно EF, пересекает сторону AB в точке X. Описанные окружности треугольников ABC и AEF пересекаются в точке T. Докажите, что $\angle XTF = 90°$.

3. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Прямая, проходящая через вершину A параллельно стороне BC, пересекает биссектрисы внешних углов B и C в точках P и Q соответственно. Прямые, проходящие через точки P и Q параллельно биссектрисам внутренних углов B и C соответственно, пересекаются в точке R. Докажите, что $AI = AR$.

4. Найдите все натуральные числа, которые нельзя представить в виде суммы двух натуральных чисел, имеющих одинаковые суммы цифр.

5. Натуральные числа a, b, c, d таковы, что число $a^2 - b^2 + c^2 - d^2$ нечетно и делится на $a - b + c - d$. Докажите, что для любого натурального числа n число $a^n - b^n + c^n - d^n$ делится на $a - b + c - d$.

6. В графе с $n \geqslant 4$ вершинами степень каждой вершины не меньше $3n/4$. На каждом ребре поставлена стрелка так, что из каждой вершины есть путь по стрелкам в любую другую. Докажите, что можно удалить одну вершину таким образом, чтобы из каждой вершины остался путь в любую другую.

7. Пусть $n \geqslant 3$ — натуральное число. Вещественные числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ таковы, что для любых четырех (не обязательно различных) неотрицательных целых чисел p, r, s, t, сумма которых равна n, выполняется равенство

$$a_p a_s + a_r a_t = a_{p+r} a_{r+s}\,.$$

Известно, что $a_1 = 1$. Найдите наибольшее возможное значение a_2.

8. Последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots$ и $y_1, y_2, y_3, \ldots$ натуральных чисел таковы, что $y_{n+1}/x_{n+1} > y_n/x_n$ для всех натуральных n. Докажите, что для бесконечно многих значений n выполняется неравенство $y_n > \sqrt{n}$.

9. Даны конечные непустые множества A и B, состоящие из целых чисел. Пусть $\lambda = |A+B|/|A|$. Докажите, что в A найдется такое непустое подмножество A', что для любого непустого множества $C \subset \mathbb{Z}$ выполняется неравенство

$$|A' + B + C| \leqslant \lambda |A' + C|\,.$$

Знак “+” обозначает сумму множеств: $X + Y = \{x + y \mid x \in X,\ y \in Y\}$ (аналогично для трех множеств), а $|X|$ — это количество элементов множества X.

10. В пространстве дан выпуклый многогранник F. Известно, что для любого $R > 1$ найдется конечное число непересекающихся многогранников, получающихся из F параллельными переносами, занимающих в некотором шаре радиуса R долю объема не меньше $1 - \frac{1}{R}$. Докажите, что все пространство можно разбить на многогранники, получающиеся из F параллельными переносами.

Двадцать Третий Российский Фестиваль юных математиков

Геленджик, 9.10.2012

Старшая лига. Третий тур.

1. Рассмотрим все слова длины 100, состоящие их букв A, B, C. Пусть среди них ровно a слов, содержащих как четное число фрагментов AB, так и четное число фрагментов AC. Пусть среди них ровно b слов, содержащих как нечетное число фрагментов AB, так и нечетное число фрагментов AC. Чему равно $a-b$?

2. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон BC, CA, AB в точках D, E, F соответственно. Прямая, проходящая через D перпендиклярно EF, пересекает сторону AB в точке X. Описанные окружности треугольников ABC и AEF пересекаются в точке T. Докажите, что $\angle XTF = 90°$.

3. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Прямая, проходящая через вершину A параллельно стороне BC, пересекает биссектрисы внешних углов B и C в точках P и Q соответственно. Прямые, проходящие через точки P и Q параллельно биссектрисам внутренних углов B и C соответственно, пересекаются в точке R. Докажите, что $AI = AR$.

4. Найдите все натуральные числа, которые нельзя представить в виде суммы двух натуральных чисел, имеющих одинаковые суммы цифр.

5. Натуральные числа a, b, c, d таковы, что число $a^2 - b^2 + c^2 - d^2$ нечетно и делится на $a - b + c - d$. Докажите, что для любого натурального числа n число $a^n - b^n + c^n - d^n$ делится на $a - b + c - d$.

6. В графе с $n \geqslant 4$ вершинами степень каждой вершины не меньше $3n/4$. На каждом ребре поставлена стрелка так, что из каждой вершины есть путь по стрелкам в любую другую. Докажите, что можно удалить одну вершину таким образом, чтобы из каждой вершины остался путь в любую другую.

7. Пусть $n \geqslant 3$ — натуральное число. Вещественные числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ таковы, что для любых четырех (не обязательно различных) неотрицательных целых чисел p, r, s, t, сумма которых равна n, выполняется равенство

$$a_p a_s + a_r a_t = a_{p+r} a_{r+s}\,.$$

Известно, что $a_1 = 1$. Найдите наибольшее возможное значение a_2.

8. Последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots$ и $y_1, y_2, y_3, \ldots$ натуральных чисел таковы, что $y_{n+1}/x_{n+1} > y_n/x_n$ для всех натуральных n. Докажите, что для бесконечно многих значений n выполняется неравенство $y_n > \sqrt{n}$.

9. Даны конечные непустые множества A и B, состоящие из целых чисел. Пусть $\lambda = |A+B|/|A|$. Докажите, что в A найдется такое непустое подмножество A', что для любого непустого множества $C \subset \mathbb{Z}$ выполняется неравенство

$$|A' + B + C| \leqslant \lambda |A' + C|\,.$$

Знак “+” обозначает сумму множеств: $X + Y = \{x + y \mid x \in X,\ y \in Y\}$ (аналогично для трех множеств), а $|X|$ — это количество элементов множества X.

10. В пространстве дан выпуклый многогранник F. Известно, что для любого $R > 1$ найдется конечное число непересекающихся многогранников, получающихся из F параллельными переносами, занимающих в некотором шаре радиуса R долю объема не меньше $1 - \frac{1}{R}$. Докажите, что все пространство можно разбить на многогранники, получающиеся из F параллельными переносами.