Двадцать Третий Российский Фестиваль юных математиков

Геленджик, 10.10.2012

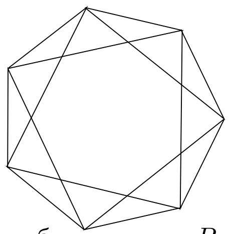
Младшая лига. Четвертый тур.

1. Три параболы $y = ax^2 - bx - c$, $y = bx^2 - cx - a$, $y = cx^2 - ax - b$ проходят через одну точку. Докажите, что $a = b = c$.

2. Рассмотрим квадрат 1099×1099 клеток. В каждом из 1100^2 узлов этого квадрата сидит жук. Могут ли все эти жуки переползти в другое место (не обязательно в узлы) таким образом, чтобы выполнялись следующие условия: А) если расстояние между жуками было не менее 100, то после переползания оно уменьшится хотя бы вдвое; и Б) если расстояние между жуками было не более 10, то после переползания оно увеличится хотя бы вдвое?

3. Сколькими способами можно числа от 1 до $2n$ разбить на пары так, чтобы ни для каких двух пар (k, ℓ) и $(k+1, m)$ не было бы $k < m < \ell$?

4. На рисунке показана схема улиц города (семиугольник правильный). За каждый поворот машины на угол α° выписывается штраф на α рублей. Как объехать весь город, стартовав в середине одной из сторон, побывав ровно по одному разу на каждом отрезке каждой из улиц, и вернуться в исходную точку, набрав по дороге штрафов на как можно меньшую сумму?



5. Найдите все такие функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что

$$f(x+y) = f(x)f(y)f(xy) \quad \text{при всех } x,\, y \in \mathbb{R}.$$

6. В равнобедренном треугольнике ABC на основании AC выбрана точка P. Точки X и Y на сторонах AB и BC соответственно таковы, что $PX \parallel BC$, $PY \parallel AB$. Точка K — середина дуги AC (не содержащей точку B) описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $KP \perp XY$.

7. По натуральному числу $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0}$ построили многочлен

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\,,$$

который, как оказалось, можно представить в виде произведения двух многочленов с целыми коэффициентами: $f(x) = g_1(x)g_2(x)$. Докажите, что многочлен $g_1(x) + g_2(x)$ не делится на $x^2 + x - 1$.

8. Граф G, содержащий 100 вершин, удовлетворяет свойству: если выбрать в нем 4 различные вершины A, B, C, D такие, что A смежна с B, B смежна с C и C смежна с D, то среди этих четырех вершин еще какие-то две смежны. Докажите, что в графе G найдутся такие две вершины X и Y, что каждая из остальных 98 вершин либо смежна и с X, и с Y, либо не смежна ни с X, ни с Y.

9. Докажите, что для любого нечетного k найдется натуральное n, такое что $n^n + k$ делится на 2^{2012}.

10. Пусть S — описанная окружность равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$). Окружность S_1 касается меньшей дуги AB окружности S в точке P и стороны AB. Окружность S_2 касается меньшей дуги BC окружности S в точке Q и стороны BC. Пусть прямая m — такая внешняя касательная к окружностям S_1 и S_2, что их центры и точка B лежат по разные стороны от прямой m. Прямая m пересекает отрезки AB и BC в точках X и Y соответственно. Докажите, что прямые PXи QY пересекаются на биссектрисе угла B.

Двадцать Третий Российский Фестиваль юных математиков

Геленджик, 10.10.2012

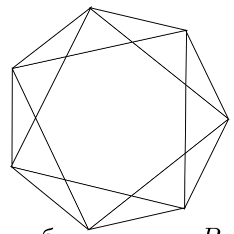
Младшая лига. Четвертый тур.

1. Три параболы $y = ax^2 - bx - c$, $y = bx^2 - cx - a$, $y = cx^2 - ax - b$ проходят через одну точку. Докажите, что $a = b = c$.

2. Рассмотрим квадрат 1099×1099 клеток. В каждом из 1100^2 узлов этого квадрата сидит жук. Могут ли все эти жуки переползти в другое место (не обязательно в узлы) таким образом, чтобы выполнялись следующие условия: А) если расстояние между жуками было не менее 100, то после переползания оно уменьшится хотя бы вдвое; и Б) если расстояние между жуками было не более 10, то после переползания оно увеличится хотя бы вдвое?

3. Сколькими способами можно числа от 1 до $2n$ разбить на пары так, чтобы ни для каких двух пар (k, ℓ) и $(k+1, m)$ не было бы $k < m < \ell$?

4. На рисунке показана схема улиц города (семиугольник правильный). За каждый поворот машины на угол α° выписывается штраф на α рублей. Как объехать весь город, стартовав в середине одной из сторон, побывав ровно по одному разу на каждом отрезке каждой из улиц, и вернуться в исходную точку, набрав по дороге штрафов на как можно меньшую сумму?



5. Найдите все такие функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что

$$f(x+y) = f(x)f(y)f(xy) \quad \text{при всех } x,\, y \in \mathbb{R}.$$

6. В равнобедренном треугольнике ABC на основании AC выбрана точка P. Точки X и Y на сторонах AB и BC соответственно таковы, что $PX \parallel BC$, $PY \parallel AB$. Точка K — середина дуги AC (не содержащей точку B) описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $KP \perp XY$.

7. По натуральному числу $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0}$ построили многочлен

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\,,$$

который, как оказалось, можно представить в виде произведения двух многочленов с целыми коэффициентами: $f(x) = g_1(x)g_2(x)$. Докажите, что многочлен $g_1(x) + g_2(x)$ не делится на $x^2 + x - 1$.

8. Граф G, содержащий 100 вершин, удовлетворяет свойству: если выбрать в нем 4 различные вершины A, B, C, D такие, что A смежна с B, B смежна с C и C смежна с D, то среди этих четырех вершин еще какие-то две смежны. Докажите, что в графе G найдутся такие две вершины X и Y, что каждая из остальных 98 вершин либо смежна и с X, и с Y, либо не смежна ни с X, ни с Y.

9. Докажите, что для любого нечетного k найдется натуральное n, такое что $n^n + k$ делится на 2^{2012}.

10. Пусть S — описанная окружность равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$). Окружность S_1 касается меньшей дуги AB окружности S в точке P и стороны AB. Окружность S_2 касается меньшей дуги BC окружности S в точке Q и стороны BC. Пусть прямая m — такая внешняя касательная к окружностям S_1 и S_2, что их центры и точка B лежат по разные стороны от прямой m. Прямая m пересекает отрезки AB и BC в точках X и Y соответственно. Докажите, что прямые PXи QY пересекаются на биссектрисе угла B.