Двадцать Третий Российский Фестиваль юных математиков

Геленджик, 10.10.2012

Старшая лига. Четвертый тур.

1. Определим последовательность $\{a_n\}$ следующим образом:

$$a_0 = \frac{1}{2}, \qquad a_{n+1} = a_n + \frac{a_n^2}{2012}.$$

Найдите такое целое k, что $a_k < 1 \leqslant a_{k+1}$.

2. Найдите все строго возрастающие функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что

$$f(1-x) = 1 - f(f(x)).$$

3. Сколькими способами можно числа от 1 до $2n$ разбить на пары так, чтобы ни для каких двух пар (k, ℓ) и $(k+1, m)$ не было бы $k < m < \ell$?

4. Докажите, что для любого нечетного k найдется натуральное n, такое что $n^n + k$ делится на 2^{2012}.

5. Рассмотрим квадрат 1099×1099 клеток. В каждом из 1100^2 узлов этого квадрата сидит жук. Могут ли все эти жуки переползти в другое место (не обязательно в узлы) таким образом, чтобы выполнялись следующие условия: А) если расстояние между жуками было не менее 100, то после переползания оно уменьшится хотя бы вдвое; и Б) если расстояние между жуками было не более 10, то после переползания оно увеличится хотя бы вдвое?

6. Существует ли бесконечное множество S натуральных чисел такое, что для любого элемента n из S в множестве S найдется ровно n элементов, взаимно простых с n?

7. Дано простое число p такое, что $p+1$ делится на 4. Известно, что для некоторых целых чисел m и n, не делящихся на p, число $m^2 + 5n^2$ делится на p. Докажите, что число $2p$ представимо в виде $a^2 + 5b^2$ при некоторых целых a и b.

8. Граф G, содержащий 100 вершин, удовлетворяет свойству: если выбрать в нем 4 различные вершины A, B, C, D такие, что A смежна с B, B смежна с C и C смежна с D, то среди этих четырех вершин еще какие-то две смежны. Докажите, что в графе G найдутся такие две вершины X и Y, что каждая из остальных 98 вершин либо смежна и с X, и с Y, либо не смежна ни с X, ни с Y.

9. На стороне AB выпуклого четырехугольника $ABCD$ дана точка P. Точки I, J, K — центры вписанных окружностей треугольников APD, DPC, PCB соответственно. Докажите, что $PIJK$ — выпуклый четырёхугольник.

10. Дан треугольник ABC. Общие касательные к его описанной и вневписанной, касающейся стороны BC, окружностям пересекают прямую BC в точках D и E. Докажите, что $\angle BAD = \angle CAE$.

Двадцать Третий Российский Фестиваль юных математиков

Геленджик, 10.10.2012

Старшая лига. Четвертый тур.

1. Определим последовательность $\{a_n\}$ следующим образом:

$$a_0 = \frac{1}{2}, \qquad a_{n+1} = a_n + \frac{a_n^2}{2012}.$$

Найдите такое целое k, что $a_k < 1 \leqslant a_{k+1}$.

2. Найдите все строго возрастающие функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что

$$f(1-x) = 1 - f(f(x)).$$

3. Сколькими способами можно числа от 1 до $2n$ разбить на пары так, чтобы ни для каких двух пар (k, ℓ) и $(k+1, m)$ не было бы $k < m < \ell$?

4. Докажите, что для любого нечетного k найдется натуральное n, такое что $n^n + k$ делится на 2^{2012}.

5. Рассмотрим квадрат 1099×1099 клеток. В каждом из 1100^2 узлов этого квадрата сидит жук. Могут ли все эти жуки переползти в другое место (не обязательно в узлы) таким образом, чтобы выполнялись следующие условия: А) если расстояние между жуками было не менее 100, то после переползания оно уменьшится хотя бы вдвое; и Б) если расстояние между жуками было не более 10, то после переползания оно увеличится хотя бы вдвое?

6. Существует ли бесконечное множество S натуральных чисел такое, что для любого элемента n из S в множестве S найдется ровно n элементов, взаимно простых с n?

7. Дано простое число p такое, что $p+1$ делится на 4. Известно, что для некоторых целых чисел m и n, не делящихся на p, число $m^2 + 5n^2$ делится на p. Докажите, что число $2p$ представимо в виде $a^2 + 5b^2$ при некоторых целых a и b.

8. Граф G, содержащий 100 вершин, удовлетворяет свойству: если выбрать в нем 4 различные вершины A, B, C, D такие, что A смежна с B, B смежна с C и C смежна с D, то среди этих четырех вершин еще какие-то две смежны. Докажите, что в графе G найдутся такие две вершины X и Y, что каждая из остальных 98 вершин либо смежна и с X, и с Y, либо не смежна ни с X, ни с Y.

9. На стороне AB выпуклого четырехугольника $ABCD$ дана точка P. Точки I, J, K — центры вписанных окружностей треугольников APD, DPC, PCB соответственно. Докажите, что $PIJK$ — выпуклый четырёхугольник.

10. Дан треугольник ABC. Общие касательные к его описанной и вневписанной, касающейся стороны BC, окружностям пересекают прямую BC в точках D и E. Докажите, что $\angle BAD = \angle CAE$.