Двадцать четвертый Российский Фестиваль юных математиков

Анапа, 5.10.2013

Лига тактик. Первый тур

1. В однокруговом шахматном турнире участвовало 30 шахматистов. У какого наибольшего числа шахматистов по окончании турнира могло оказаться ровно 5 очков? (Победа оценивается в 1 очко, ничья — 1/2 очка, поражение — 0.)

2. Найдите все такие натуральные m и n, что числа $\dfrac{m^2+2n}{n^2-2m}$ и $\dfrac{n^2+2m}{m^2-2n}$ — целые.

3. Вершины правильного 2013-угольника требуется покрасить в белый и зеленый цвета так, чтобы среди любых 21 последовательных вершин нашлась хотя бы одна зеленая. Докажите, что количество способов это сделать нечетно.

4. В каждой вершине тетраэдра написано вещественное число. На каждом ребре написана сумма двух чисел, стоящих на его концах. Известно, что сумма всех чисел на ребрах равна 6, а сумма их квадратов равна 12. Чему равна сумма их кубов?

5. Положительные числа a, b и c таковы, что $abc = 1$. Докажите неравенство:

$$\frac{1}{1+a^2+(b+1)^2}+\frac{1}{1+b^2+(c+1)^2}+\frac{1}{1+c^2+(a+1)^2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

6. На плоскости находятся 2013 квадратов 1×1 с вертикальными и горизонтальными сторонами. Докажите, что сумма площадей областей, покрытых нечетное число раз, не меньше 1.

7. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1. Через точку A_1 проведены прямые, параллельные сторонам AB и AC. Обозначим через a_1 и a_2 отрезки проведенных прямых, лежащие внутри треугольника ABC. Аналогично определяются отрезки b_1, b_2 и c_1, c_2. Докажите, что

$$a_1+a_2+b_1+b_2+c_1+c_2 \leqslant P_{ABC}.$$

8. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. На стороне AB выбрана такая точка P, что $\angle BOP = \angle ABC$, а на стороне AC выбрана такая точка Q, что $\angle COQ = \angle ACB$. Докажите, что прямая, симметричная прямой BC относительно прямой PQ, касается описанной окружности треугольника APQ.

9. Пусть p и q — взаимно простые натуральные числа. Найдите сумму

$$\sum_{k=0}^{pq-1}(-1)^{[k/p]+[k/q]}.$$

10. Дано простое число p. На каждом ребре полного графа на $1000p$ вершинах написали целое число. Докажите, что найдется простой цикл, сумма чисел на ребрах которого делится на p.

Двадцать четвертый Российский Фестиваль юных математиков

Анапа, 5.10.2013

Лига тактик. Первый тур

1. В однокруговом шахматном турнире участвовало 30 шахматистов. У какого наибольшего числа шахматистов по окончании турнира могло оказаться ровно 5 очков? (Победа оценивается в 1 очко, ничья — 1/2 очка, поражение — 0.)

2. Найдите все такие натуральные m и n, что числа $\dfrac{m^2+2n}{n^2-2m}$ и $\dfrac{n^2+2m}{m^2-2n}$ — целые.

3. Вершины правильного 2013-угольника требуется покрасить в белый и зеленый цвета так, чтобы среди любых 21 последовательных вершин нашлась хотя бы одна зеленая. Докажите, что количество способов это сделать нечетно.

4. В каждой вершине тетраэдра написано вещественное число. На каждом ребре написана сумма двух чисел, стоящих на его концах. Известно, что сумма всех чисел на ребрах равна 6, а сумма их квадратов равна 12. Чему равна сумма их кубов?

5. Положительные числа a, b и c таковы, что $abc = 1$. Докажите неравенство:

$$\frac{1}{1+a^2+(b+1)^2}+\frac{1}{1+b^2+(c+1)^2}+\frac{1}{1+c^2+(a+1)^2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

6. На плоскости находятся 2013 квадратов 1×1 с вертикальными и горизонтальными сторонами. Докажите, что сумма площадей областей, покрытых нечетное число раз, не меньше 1.

7. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1. Через точку A_1 проведены прямые, параллельные сторонам AB и AC. Обозначим через a_1 и a_2 отрезки проведенных прямых, лежащие внутри треугольника ABC. Аналогично определяются отрезки b_1, b_2 и c_1, c_2. Докажите, что

$$a_1+a_2+b_1+b_2+c_1+c_2 \leqslant P_{ABC}.$$

8. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. На стороне AB выбрана такая точка P, что $\angle BOP = \angle ABC$, а на стороне AC выбрана такая точка Q, что $\angle COQ = \angle ACB$. Докажите, что прямая, симметричная прямой BC относительно прямой PQ, касается описанной окружности треугольника APQ.

9. Пусть p и q — взаимно простые натуральные числа. Найдите сумму

$$\sum_{k=0}^{pq-1}(-1)^{[k/p]+[k/q]}.$$

10. Дано простое число p. На каждом ребре полного графа на $1000p$ вершинах написали целое число. Докажите, что найдется простой цикл, сумма чисел на ребрах которого делится на p.

Двадцать четвертый Российский Фестиваль юных математиков
Анапа, 6.10.2013
Лига тактик. Второй тур

1. Два натуральных числа называются похожими, если одно из них получается из другого зачеркиванием одной цифры (и, возможно, отбрасыванием впереди стоящих нулей). Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, которые не представимы в виде суммы двух похожих.

2. В вершинах выпуклого 2013-угольника расставлены нули и единицы. Докажите, что 2013-угольник можно разбить непересекающимися диагоналями на треугольники так, чтобы суммы чисел в вершинах любых двух треугольников отличались не более чем на 1.

3. У Деда Мороза есть $n > 1$ различных подарков. Он как-то раскладывает их по мешкам и кладет мешки вокруг елки (важно содержимое мешков и порядок, в котором они лежат вокруг елки). Докажите, что количество способов сделать это, используя четное и нечетное количество мешков, равны. Пример: если есть три подарка A, B, C, то различные варианты — это

A-(BC), B-(AC), C-(AB); (ABC), A-B-C, A-C-B.

4. Положим $a \bowtie b = \frac{a-b}{(a,b)}$. Докажите, что $(n, n \bowtie k) = 1$ для всех k от 1 до $n-1$ в том и только в том случае, когда n является степенью простого числа.

5. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC ($AB > AC$). Прямые BO и CO пересекают биссектрису угла BAC в точках P и Q соответственно. Прямые BQ и CP пересекаются в точке R. Докажите, что $AR \perp BC$.

6. Положительные вещественные числа a и b ($a \neq b$)таковы, что числа $a - \sqrt{ab}$ и $b - \sqrt{ab}$ рациональные. Докажите, что числа a и b тоже рациональные.

7. В графе 300 вершин, все они степени 3. Какое наибольшее количество циклов длины 4 может быть в этом графе?

8. Докажите, что при $a, b, c \geqslant 1$ выполнено неравенство

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} \leqslant \sqrt{c(ab+1)}.$$

9. В дельтоиде $ABCD$ стороны AB и BC равны 5, а стороны CD и DA равны 3. Точка K на стороне BC такова, что $BK = 3$. Оказалось, что $AK \| CD$. Найдите длину отрезка AK.

10. Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что при любом вещественном x верно, что $f(f(x)) = x^3$. Найдите сумму $f(-1) + f(0) + f(1)$.

Двадцать четвертый Российский Фестиваль юных математиков
Анапа, 6.10.2013
Лига тактик. Второй тур

1. Два натуральных числа называются похожими, если одно из них получается из другого зачеркиванием одной цифры (и, возможно, отбрасыванием впереди стоящих нулей). Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, которые не представимы в виде суммы двух похожих.

2. В вершинах выпуклого 2013-угольника расставлены нули и единицы. Докажите, что 2013-угольник можно разбить непересекающимися диагоналями на треугольники так, чтобы суммы чисел в вершинах любых двух треугольников отличались не более чем на 1.

3. У Деда Мороза есть $n > 1$ различных подарков. Он как-то раскладывает их по мешкам и кладет мешки вокруг елки (важно содержимое мешков и порядок, в котором они лежат вокруг елки). Докажите, что количество способов сделать это, используя четное и нечетное количество мешков, равны. Пример: если есть три подарка A, B, C, то различные варианты — это

A-(BC), B-(AC), C-(AB); (ABC), A-B-C, A-C-B.

4. Положим $a \bowtie b = \frac{a-b}{(a,b)}$. Докажите, что $(n, n \bowtie k) = 1$ для всех k от 1 до $n-1$ в том и только в том случае, когда n является степенью простого числа.

5. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC ($AB > AC$). Прямые BO и CO пересекают биссектрису угла BAC в точках P и Q соответственно. Прямые BQ и CP пересекаются в точке R. Докажите, что $AR \perp BC$.

6. Положительные вещественные числа a и b ($a \neq b$)таковы, что числа $a - \sqrt{ab}$ и $b - \sqrt{ab}$ рациональные. Докажите, что числа a и b тоже рациональные.

7. В графе 300 вершин, все они степени 3. Какое наибольшее количество циклов длины 4 может быть в этом графе?

8. Докажите, что при $a, b, c \geqslant 1$ выполнено неравенство

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} \leqslant \sqrt{c(ab+1)}.$$

9. В дельтоиде $ABCD$ стороны AB и BC равны 5, а стороны CD и DA равны 3. Точка K на стороне BC такова, что $BK = 3$. Оказалось, что $AK \| CD$. Найдите длину отрезка AK.

10. Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что при любом вещественном x верно, что $f(f(x)) = x^3$. Найдите сумму $f(-1) + f(0) + f(1)$.

Двадцать четвертый Российский Фестиваль юных математиков

Анапа, 8.10.2013

Лига тактик. Третий тур

1. Все клетки квадрата 5×5 покрашены в синий и красный цвета так, что среди раскрасок квадратов 2×2 встречаются все возможные раскраски. Найдите наименьшее возможное число красных клеток.

2. Найдите все тройки натуральных чисел (x, y, z), для которых число

$$\sqrt{\frac{2013}{x+y}} + \sqrt{\frac{2013}{y+z}} + \sqrt{\frac{2013}{z+x}}$$

является целым.

3. На прямой отмечено несколько различных отрезков с концами в целых точках от 0 до 2013. Оказалось, что если один из отрезков содержится в другом, то у них совпадает один из концов. Какое наибольшее количество отрезков могло быть отмечено?

4. Существуют ли такие два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ степени 2013 с вещественными коэффициентами, что корнями многочлена $P(Q(x))$ являются числа $2,\ 2^2,\ \ldots, 2^{2013^2}$?

5. Найдите все такие функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что образом каждого интервала является интервал той же длины.

6. В остроугольном треугольнике ABC угол C больше угла A. Отрезок AE — диаметр описанной окружности треугольника. K — точка пересечения луча AC и касательной к окружности, проведенной в точке B. Перпендикуляр, опущенный из K на AE, второй раз пересекает описанную окружность треугольника BCK в точке D. Докажите, что CE — биссектриса угла BCD.

7. Дано натуральное число n. Пусть $0 = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n = 1$. Найдите максимальное возможное значение суммы

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i x_{i+1}(x_{i+1} - x_i).$$

8. Дано $n > 2$. Каким наименьшим количеством полных графов на n вершинах можно покрыть все ребра полного графа на $2n$ вершинах?

9. Пусть F_n — это количество способов разбить на части n-элементное множество, причем порядок частей важен. Например, $F_1 = 1$, $F_2 = 3$, $F_3 = 13$, $F_4 = 75$. Докажите, что $F_{n+4} \equiv F_n \pmod{10}$ при всех n.

10. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Перпендикуляр, восставленный в точке B к прямой BC, пересекает серединный перпендикуляр к отрезку AB в точке P. Перпендикуляр, восставленный в точке C к прямой BC, пересекает серединный перпендикуляр к отрезку AC в точке Q. Точка T — центр описанной окружности треугольника POQ. Докажите, что прямая AT касается описанной окружности треугольника ABC.

Двадцать четвертый Российский Фестиваль юных математиков

Анапа, 8.10.2013

Лига тактик. Третий тур

1. Все клетки квадрата 5×5 покрашены в синий и красный цвета так, что среди раскрасок квадратов 2×2 встречаются все возможные раскраски. Найдите наименьшее возможное число красных клеток.

2. Найдите все тройки натуральных чисел (x, y, z), для которых число

$$\sqrt{\frac{2013}{x+y}} + \sqrt{\frac{2013}{y+z}} + \sqrt{\frac{2013}{z+x}}$$

является целым.

3. На прямой отмечено несколько различных отрезков с концами в целых точках от 0 до 2013. Оказалось, что если один из отрезков содержится в другом, то у них совпадает один из концов. Какое наибольшее количество отрезков могло быть отмечено?

4. Существуют ли такие два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ степени 2013 с вещественными коэффициентами, что корнями многочлена $P(Q(x))$ являются числа $2,\ 2^2,\ \ldots, 2^{2013^2}$?

5. Найдите все такие функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что образом каждого интервала является интервал той же длины.

6. В остроугольном треугольнике ABC угол C больше угла A. Отрезок AE — диаметр описанной окружности треугольника. K — точка пересечения луча AC и касательной к окружности, проведенной в точке B. Перпендикуляр, опущенный из K на AE, второй раз пересекает описанную окружность треугольника BCK в точке D. Докажите, что CE — биссектриса угла BCD.

7. Дано натуральное число n. Пусть $0 = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n = 1$. Найдите максимальное возможное значение суммы

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i x_{i+1}(x_{i+1} - x_i).$$

8. Дано $n > 2$. Каким наименьшим количеством полных графов на n вершинах можно покрыть все ребра полного графа на $2n$ вершинах?

9. Пусть F_n — это количество способов разбить на части n-элементное множество, причем порядок частей важен. Например, $F_1 = 1$, $F_2 = 3$, $F_3 = 13$, $F_4 = 75$. Докажите, что $F_{n+4} \equiv F_n \pmod{10}$ при всех n.

10. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Перпендикуляр, восставленный в точке B к прямой BC, пересекает серединный перпендикуляр к отрезку AB в точке P. Перпендикуляр, восставленный в точке C к прямой BC, пересекает серединный перпендикуляр к отрезку AC в точке Q. Точка T — центр описанной окружности треугольника POQ. Докажите, что прямая AT касается описанной окружности треугольника ABC.

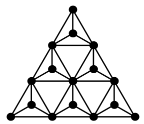
Двадцать четвертый Российский Фестиваль юных математиков

Анапа, 9.10.2013

Лига тактик. Четвертый тур

1. На вертикальную стену наклеены непересекающиеся иголки (представляющие из себя интервалы). Докажите, что найдется иголка, которая может отклеиться и упасть на пол, не задевая других иголок. Иголка падает на пол, все время оставаясь параллельной начальному положению.

2. Дано нечетное число n. Правильный треугольник разделен на n^2 маленьких треугольников, которые покрашены в шахматном порядке (угловые треугольники черные). В каждом черном треугольнике отметили центр и соединили с вершинами. Полученную картинку рассматривают как граф: узлы сетки и центры треугольников — вершины, отрезки — ребра (на рисунке изображен пример для $n = 3$). Докажите, что количество полных паросочетаний этого графа делится на $3^{(n+1)/2}$.



3. Даны натуральные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_n и число $a > 1$, делящееся на их произведение. Докажите, что $a^{n+1} + a - 1$ не делится на произведение

$$(a + a_1 - 1)(a + a_2 - 1)\ldots(a + a_n - 1).$$

4. Докажите, что в турнире с $2n$ вершинами найдется любое подвешенное ориентированное дерево на $n + 1$ вершинах.

5. Будем говорить, что две триангуляции выпуклого n-угольника ортогональны, если у них нет ни одной общей диагонали. Докажите, что все триангуляции с двумя ушами имеют одинаковое количество ортогональных.

6. Положительные числа x, y, z удовлетворяют соотношению $xy + yz + xz = 1$. Докажите неравенство $\dfrac{x^3}{x^2 + yz} + \dfrac{y^3}{y^2 + zx} + \dfrac{z^3}{z^2 + xy} \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

7. Пусть p — простое число. Найдите минимальное натуральное d, для которого существует унитарный многочлен степени d с целыми коэффициентами, все значения которого в целых точках делятся на p^{p+1}.

8. Пусть AK — биссектриса неравнобедренного треугольника ABC, M — середина дуги BAC его описанной окружности ω. Луч MK вторично пересекает окружность ω в точке A'. Касательные к ω в точках A и A' пересекаются в точке T. Точка R такова, что $RA' \perp A'K$, $RA \perp AK$. Докажите, что точки K, R, T лежат на одной прямой.

9. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Точка H — ортоцентр, а точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Точка K — ортоцентр треугольника AOB. Докажите, что прямая HK проходит через середину отрезка A_1B_1.

10. Фенечка — это клетчатая бумажная полоска $2 \times n$, склеенная в цилиндрическое колечко высоты 2. Два игрока по очереди вырезают из фенечки по одной клетке. Игрок, после хода которого фенечка развернется (потеряет цилиндрическую связность), проигрывает. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его соперник? Две клетки, соседние по углу, считаются несвязанными.

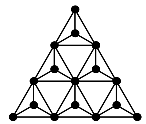
Двадцать четвертый Российский Фестиваль юных математиков

Анапа, 9.10.2013

Лига тактик. Четвертый тур

1. На вертикальную стену наклеены непересекающиеся иголки (представляющие из себя интервалы). Докажите, что найдется иголка, которая может отклеиться и упасть на пол, не задевая других иголок. Иголка падает на пол, все время оставаясь параллельной начальному положению.

2. Дано нечетное число n. Правильный треугольник разделен на n^2 маленьких треугольников, которые покрашены в шахматном порядке (угловые треугольники черные). В каждом черном треугольнике отметили центр и соединили с вершинами. Полученную картинку рассматривают как граф: узлы сетки и центры треугольников — вершины, отрезки — ребра (на рисунке изображен пример для $n = 3$). Докажите, что количество полных паросочетаний этого графа делится на $3^{(n+1)/2}$.



3. Даны натуральные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_n и число $a > 1$, делящееся на их произведение. Докажите, что $a^{n+1} + a - 1$ не делится на произведение

$$(a + a_1 - 1)(a + a_2 - 1)\ldots(a + a_n - 1).$$

4. Докажите, что в турнире с $2n$ вершинами найдется любое подвешенное ориентированное дерево на $n + 1$ вершинах.

5. Будем говорить, что две триангуляции выпуклого n-угольника ортогональны, если у них нет ни одной общей диагонали. Докажите, что все триангуляции с двумя ушами имеют одинаковое количество ортогональных.

6. Положительные числа x, y, z удовлетворяют соотношению $xy + yz + xz = 1$. Докажите неравенство $\dfrac{x^3}{x^2 + yz} + \dfrac{y^3}{y^2 + zx} + \dfrac{z^3}{z^2 + xy} \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

7. Пусть p — простое число. Найдите минимальное натуральное d, для которого существует унитарный многочлен степени d с целыми коэффициентами, все значения которого в целых точках делятся на p^{p+1}.

8. Пусть AK — биссектриса неравнобедренного треугольника ABC, M — середина дуги BAC его описанной окружности ω. Луч MK вторично пересекает окружность ω в точке A'. Касательные к ω в точках A и A' пересекаются в точке T. Точка R такова, что $RA' \perp A'K$, $RA \perp AK$. Докажите, что точки K, R, T лежат на одной прямой.

9. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Точка H — ортоцентр, а точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Точка K — ортоцентр треугольника AOB. Докажите, что прямая HK проходит через середину отрезка A_1B_1.

10. Фенечка — это клетчатая бумажная полоска $2 \times n$, склеенная в цилиндрическое колечко высоты 2. Два игрока по очереди вырезают из фенечки по одной клетке. Игрок, после хода которого фенечка развернется (потеряет цилиндрическую связность), проигрывает. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его соперник? Две клетки, соседние по углу, считаются несвязанными.

Двадцать четвертый Российский Фестиваль юных математиков

Анапа, 9.10.2013

Лига тактик. Четвертый тур

1. На вертикальную стену наклеены непересекающиеся иголки (представляющие из себя интервалы). Докажите, что найдется иголка, которая может отклеиться и упасть на пол, не задевая других иголок. Иголка падает на пол, все время оставаясь параллельной начальному положению.

2. Докажите, что при любом натуральном n уголок, составленный из трех квадратов $n \times n$, можно разрезать на уголки из трех клеток.

3. Даны натуральные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_n и число $a > 1$, делящееся на их произведение. Докажите, что $a^{n+1} + a - 1$ не делится на произведение

$$(a + a_1 - 1)(a + a_2 - 1) \ldots (a + a_n - 1).$$

4. На плоскости отмечены узлы, образующие квадрат 2013×2013. Через каждую отмеченную точку провели прямую с угловым коэффициентом $\frac{20}{13}$. Сколько разных прямых получилось?

5. Существует ли граф с 2013 вершинами, пронумерованными числами от 1 до 2013, такой что любые две вершины имеют общую соседнюю вершину, если и только если номер одной из них делится на номер другой.

6. Положительные числа x, y, z удовлетворяют соотношению $xy + yz + xz = 1$. Докажите неравенство $\dfrac{x^3}{x^2 + yz} + \dfrac{y^3}{y^2 + zx} + \dfrac{z^3}{z^2 + xy} \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

7. Пусть x и y — два рациональных числа, n — нечетное натуральное число. Оказалось, что $x^n - 2x = y^n - 2y$. Докажите, что $x = y$.

8. В треугольнике ABC угол A равен 84°. Окружность, вписанная в треугольник ABC касается его сторон в точках A_1, B_1 и C_1 — соответственно. Центра окружностей, вписанных в треугольники AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C — это точки, O_A, O_B и O_C соответственно. Чему равен угол $O_BO_AO_C$?

9. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Точка H — ортоцентр, а точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Точка K — ортоцентр треугольника AOB. Докажите, что прямая HK проходит через середину отрезка A_1B_1.

10. Фенечка — это клетчатая бумажная полоска $2 \times n$, склеенная в цилиндрическое колечко высоты 2. Два игрока по очереди вырезают из фенечки по одной клетке. Игрок, после хода которого фенечка развернется (потеряет цилиндрическую связность), проигрывает. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его соперник? Две клетки, соседние по углу, считаются несвязанными.

Двадцать четвертый Российский Фестиваль юных математиков

Анапа, 9.10.2013

Лига тактик. Четвертый тур

1. На вертикальную стену наклеены непересекающиеся иголки (представляющие из себя интервалы). Докажите, что найдется иголка, которая может отклеиться и упасть на пол, не задевая других иголок. Иголка падает на пол, все время оставаясь параллельной начальному положению.

2. Докажите, что при любом натуральном n уголок, составленный из трех квадратов $n \times n$, можно разрезать на уголки из трех клеток.

3. Даны натуральные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_n и число $a > 1$, делящееся на их произведение. Докажите, что $a^{n+1} + a - 1$ не делится на произведение

$$(a + a_1 - 1)(a + a_2 - 1) \ldots (a + a_n - 1).$$

4. На плоскости отмечены узлы, образующие квадрат 2013×2013. Через каждую отмеченную точку провели прямую с угловым коэффициентом $\frac{20}{13}$. Сколько разных прямых получилось?

5. Существует ли граф с 2013 вершинами, пронумерованными числами от 1 до 2013, такой что любые две вершины имеют общую соседнюю вершину, если и только если номер одной из них делится на номер другой.

6. Положительные числа x, y, z удовлетворяют соотношению $xy + yz + xz = 1$. Докажите неравенство $\dfrac{x^3}{x^2 + yz} + \dfrac{y^3}{y^2 + zx} + \dfrac{z^3}{z^2 + xy} \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

7. Пусть x и y — два рациональных числа, n — нечетное натуральное число. Оказалось, что $x^n - 2x = y^n - 2y$. Докажите, что $x = y$.

8. В треугольнике ABC угол A равен 84°. Окружность, вписанная в треугольник ABC касается его сторон в точках A_1, B_1 и C_1 — соответственно. Центра окружностей, вписанных в треугольники AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C — это точки, O_A, O_B и O_C соответственно. Чему равен угол $O_BO_AO_C$?

9. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Точка H — ортоцентр, а точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Точка K — ортоцентр треугольника AOB. Докажите, что прямая HK проходит через середину отрезка A_1B_1.

10. Фенечка — это клетчатая бумажная полоска $2 \times n$, склеенная в цилиндрическое колечко высоты 2. Два игрока по очереди вырезают из фенечки по одной клетке. Игрок, после хода которого фенечка развернется (потеряет цилиндрическую связность), проигрывает. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его соперник? Две клетки, соседние по углу, считаются несвязанными.

Двадцать четвертый Российский Фестиваль юных математиков

Анапа, 5.10.2013

Лига стратегий. Первый тур.

1. Пусть p и q — взаимно простые натуральные числа. Найдите сумму

$$\sum_{k=0}^{pq-1} (-1)^{[k/p]+[k/q]}.$$

2. Вершины правильного 2013-угольника требуется раскрасить в белый и зеленый цвета так, чтобы среди любых 21 последовательной вершины нашлась хотя бы одна зеленая. Докажите, что количество способов это сделать нечетно.

3. Найдите все такие функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых выполнены следующие условия 1) $f(0) \in \mathbb{Q}$; 2) $f(x+y)^2 = f\big(x + f(y)^2\big)$.

4. Дано натуральное число n. На каждом ребре полного графа на $1000n$ вершинах написали целое число. Докажите, что найдется простой цикл, сумма чисел на ребрах которого делится на n.

5. Сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2013}$ равна 1, $x_{2014} = x_1$. Найдите минимум выражения $\prod\limits_{i=1}^{2013} (1 - x_i x_{i+1})$.

6. Дан треугольник площади 1. На плоскости находятся 2013 параллельных сдвигов этого треугольника. Докажите, что сумма площадей областей, покрытых нечетное число раз, не меньше $\frac{1}{2}$.

7. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. На стороне AB выбрана такая точка P, что $\angle BOP = \angle ABC$, а на стороне AC выбрана такая точка Q, что $\angle COQ = \angle ACB$. Докажите, что прямая, симметричная прямой BC относительно прямой PQ, касается описанной окружности треугольника APQ.

8. На прямой ℓ выбраны точки A, B, C и D (в таком порядке). Сферы ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 проходят через точки A и B, а сферы ω_1' и ω_2' с центрами O_1' и O_2' — через точки C и D. При этом $\omega_1 \perp \omega_1'$, а прямые O_1O_2', O_2O_1' и ℓ пересекаются в одной точке. Докажите, что $\omega_2 \perp \omega_2'$.

9. Докажите, что простое число $p > 5$ можно представить в виде $2x^2 + 3y^2$, где x, $y \in \mathbb{Z}$, тогда и только тогда, когда p дает остаток 5 или 11 при делении на 24.

10. Выберем произвольно два вещественных числа α и β в интервале $(0; 2\pi)$. Положим круглый пирог на неподвижное круглое белое блюдо, на котором нарисован черный сектор угловой величины α. Далее будем выполнять следующее преобразование: вырежем часть пирога, попавшую в сектор, перевернем эту часть и вставим на место «вверх ногами», после чего повернем весь пирог на угол β (в положительном направлении). Докажите, что через конечное число преобразований сразу все точки пирога вернутся на исходные места.

Двадцать четвертый Российский Фестиваль юных математиков

Анапа, 5.10.2013

Лига стратегий. Первый тур.

1. Пусть p и q — взаимно простые натуральные числа. Найдите сумму

$$\sum_{k=0}^{pq-1} (-1)^{[k/p]+[k/q]}.$$

2. Вершины правильного 2013-угольника требуется раскрасить в белый и зеленый цвета так, чтобы среди любых 21 последовательной вершины нашлась хотя бы одна зеленая. Докажите, что количество способов это сделать нечетно.

3. Найдите все такие функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых выполнены следующие условия 1) $f(0) \in \mathbb{Q}$; 2) $f(x+y)^2 = f\big(x + f(y)^2\big)$.

4. Дано натуральное число n. На каждом ребре полного графа на $1000n$ вершинах написали целое число. Докажите, что найдется простой цикл, сумма чисел на ребрах которого делится на n.

5. Сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2013}$ равна 1, $x_{2014} = x_1$. Найдите минимум выражения $\prod\limits_{i=1}^{2013} (1 - x_i x_{i+1})$.

6. Дан треугольник площади 1. На плоскости находятся 2013 параллельных сдвигов этого треугольника. Докажите, что сумма площадей областей, покрытых нечетное число раз, не меньше $\frac{1}{2}$.

7. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. На стороне AB выбрана такая точка P, что $\angle BOP = \angle ABC$, а на стороне AC выбрана такая точка Q, что $\angle COQ = \angle ACB$. Докажите, что прямая, симметричная прямой BC относительно прямой PQ, касается описанной окружности треугольника APQ.

8. На прямой ℓ выбраны точки A, B, C и D (в таком порядке). Сферы ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 проходят через точки A и B, а сферы ω_1' и ω_2' с центрами O_1' и O_2' — через точки C и D. При этом $\omega_1 \perp \omega_1'$, а прямые O_1O_2', O_2O_1' и ℓ пересекаются в одной точке. Докажите, что $\omega_2 \perp \omega_2'$.

9. Докажите, что простое число $p > 5$ можно представить в виде $2x^2 + 3y^2$, где x, $y \in \mathbb{Z}$, тогда и только тогда, когда p дает остаток 5 или 11 при делении на 24.

10. Выберем произвольно два вещественных числа α и β в интервале $(0; 2\pi)$. Положим круглый пирог на неподвижное круглое белое блюдо, на котором нарисован черный сектор угловой величины α. Далее будем выполнять следующее преобразование: вырежем часть пирога, попавшую в сектор, перевернем эту часть и вставим на место «вверх ногами», после чего повернем весь пирог на угол β (в положительном направлении). Докажите, что через конечное число преобразований сразу все точки пирога вернутся на исходные места.

Двадцать четвертый Российский Фестиваль юных математиков

Анапа, 6.10.2013

Лига стратегий. Второй тур

1. Дан планарный граф, в котором максимальная степень вершины равна $d > 100$, а длина минимального простого цикла равна $10d + 100$. Докажите, что ребра графа можно раскрасить в $2d - 1$ цвет так, чтобы любые два ребра, имеющих либо общую вершину, либо смежные вершины, были бы разного цвета.

2. Можно ли покрыть трехмерное пространство семейством попарно скрещивающихся прямых?

3. У Деда Мороза есть $n > 1$ различных подарков. Он как-то раскладывает их по мешкам и кладет мешки вокруг елки (важно содержимое мешков и порядок, в котором они лежат вокруг елки). Докажите, что количество способов сделать это, используя четное и нечетное количество мешков, равны. Пример: если есть три подарка A, B, C, то различные варианты — это

A-(BC), B-(AC), C-(AB); (ABC), A-B-C, A-C-B.

4. Существует ли бесконечное множество $M \subset \mathbb{N}$, такое что для любых его элементов $x < y$ число $x + y$ свободно от квадратов?

5. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC ($AB > AC$). Прямые BO и CO пересекают биссектрису угла BAC в точках P и Q соответственно. Прямые BQ и CP пересекаются в точке R. Докажите, что $AR \perp BC$.

[*В одном из матбоев задача 5 была заменена на следующую задачу.*]

5'. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC выбраны точки P, Q и R соответственно. Обозначим через ω_A, ω_B и ω_C описаные окружности треугольников AQR, BRP, CPQ соответственно. Отрезок AP пересекает второй раз окружности ω_A, ω_B, ω_C в точках X, Y, Z. Докажите, что $\frac{YX}{XZ} = \frac{BP}{PC}$.

6. Даны натуральные числа m и n. Докажите, что найдется такое натуральное число c, что каждая ненулевая цифра встречается в десятичных записях чисел cm и cn одинаковое число раз.

7. Дана функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такая что $f(f(x)) = x^{2013}$ при всех вещественных x. Найдите сумму $f(-1) + f(0) + f(1)$.

8. Докажите, что при $a, b, c \geqslant 1$ выполнено неравенство

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} \leqslant \sqrt{c(ab+1)}.$$

9. В описанном четырехугольнике $ABCD$ выполнено равенство

$$\angle ABD + \angle BCA = \angle BDA + \angle DCA.$$

Докажите, что либо одна из диагоналей четырехугольника делит другую пополам, либо четырехугольник $ABCD$ — вписанный.

10. В вершинах выпуклого 2013-угольника расставлены нули и единицы. Докажите, что 2013-угольник можно разбить непересекающимися диагоналями на треугольники так, чтобы суммы чисел в вершинах любых двух треугольников отличались не более чем на 1.

Двадцать четвертый Российский Фестиваль юных математиков

Анапа, 6.10.2013

Лига стратегий. Второй тур

1. Дан планарный граф, в котором максимальная степень вершины равна $d > 100$, а длина минимального простого цикла равна $10d + 100$. Докажите, что ребра графа можно раскрасить в $2d - 1$ цвет так, чтобы любые два ребра, имеющих либо общую вершину, либо смежные вершины, были бы разного цвета.

2. Можно ли покрыть трехмерное пространство семейством попарно скрещивающихся прямых?

3. У Деда Мороза есть $n > 1$ различных подарков. Он как-то раскладывает их по мешкам и кладет мешки вокруг елки (важно содержимое мешков и порядок, в котором они лежат вокруг елки). Докажите, что количество способов сделать это, используя четное и нечетное количество мешков, равны. Пример: если есть три подарка A, B, C, то различные варианты — это

A-(BC), B-(AC), C-(AB); (ABC), A-B-C, A-C-B.

4. Существует ли бесконечное множество $M \subset \mathbb{N}$, такое что для любых его элементов $x < y$ число $x + y$ свободно от квадратов?

5. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC ($AB > AC$). Прямые BO и CO пересекают биссектрису угла BAC в точках P и Q соответственно. Прямые BQ и CP пересекаются в точке R. Докажите, что $AR \perp BC$.

[*В одном из матбоев задача 5 была заменена на следующую задачу.*]

5'. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC выбраны точки P, Q и R соответственно. Обозначим через ω_A, ω_B и ω_C описаные окружности треугольников AQR, BRP, CPQ соответственно. Отрезок AP пересекает второй раз окружности ω_A, ω_B, ω_C в точках X, Y, Z. Докажите, что $\frac{YX}{XZ} = \frac{BP}{PC}$.

6. Даны натуральные числа m и n. Докажите, что найдется такое натуральное число c, что каждая ненулевая цифра встречается в десятичных записях чисел cm и cn одинаковое число раз.

7. Дана функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такая что $f(f(x)) = x^{2013}$ при всех вещественных x. Найдите сумму $f(-1) + f(0) + f(1)$.

8. Докажите, что при $a, b, c \geqslant 1$ выполнено неравенство

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} \leqslant \sqrt{c(ab+1)}.$$

9. В описанном четырехугольнике $ABCD$ выполнено равенство

$$\angle ABD + \angle BCA = \angle BDA + \angle DCA.$$

Докажите, что либо одна из диагоналей четырехугольника делит другую пополам, либо четырехугольник $ABCD$ — вписанный.

10. В вершинах выпуклого 2013-угольника расставлены нули и единицы. Докажите, что 2013-угольник можно разбить непересекающимися диагоналями на треугольники так, чтобы суммы чисел в вершинах любых двух треугольников отличались не более чем на 1.

Двадцать четвертый Российский Фестиваль юных математиков

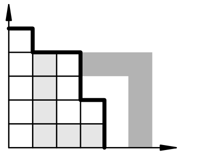
Анапа, 8.10.2013

Лига стратегий. Третий тур

1. В треугольнике ABC, $AB > AC$, M — середина дуги BAC описанной окружности, I — центр вписанной окружности ω, D — точка касания ω и стороны BC. Прямая, проходящая через D параллельно AI, вторично пересекает ω в точке P. Докажите, что AP и IM пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.

2. Дано натуральное число n. Пусть $0 = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \dots \leqslant x_n = 1$. Найдите максимальное возможное значение суммы

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i x_{i+1}(x_{i+1} - x_i).$$



3. Докажите, что количество крюков данной формы в диаграмме Юнга на 1 меньше количества таких же (отраженных) крюков в ее дополнении в первом квадранте. На рисунке изображен крюк в диаграмме Юнга и отраженный крюк в дополнении.

4. Дано $n > 2$. Каким наименьшим количеством полных графов на n вершинах можно покрыть все ребра полного графа на $2n$ вершинах?

5. Набор прямых на плоскости назовем *регулярным*, если граница хотя бы одной из частей (не обязательно ограниченной), на которые **они** разбивают плоскость, проходит по каждой из прямых набора. Докажите, что при достаточно большом N среди любых N прямых общего положения на плоскости (никакие две не параллельны, никакие три не пересекаются в одной точке) можно найти регулярный набор из 2013 прямых.

6. Даны $n > 2$ целых чисел, взаимно простых в совокупности. Разрешается прибавить к любому из чисел целое кратное любого из остальных чисел. За какое наименьшее число таких операций мы заведомо сможем добиться того, что набор чисел будет содержать хотя бы одну единицу?

7. Определим функцию $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ с помощью соотношений

$$f(1) = 1, \qquad f(n+1) = f(n) + 2^{f(n)} \quad \text{при всех} \quad n \in \mathbb{N}$$

Докажите, что числа $f(1)$, $f(2)$, …, $f(3^{2013})$ дают разные остатки при делении на 3^{2013}.

8. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Перпендикуляр, восставленный в точке B к прямой BC, пересекает серединный перпендикуляр к отрезку AB в точке P. Перпендикуляр, восставленный в точке C к прямой BC, пересекает серединный перпендикуляр к отрезку AC в точке Q. Точка T — центр описанной окружности треугольника POQ. Докажите, что прямая AT касается описанной окружности треугольника ABC.

9. Найдите все такие функции $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, что при всех $x, y \geqslant 0$

$$f\bigl(2f(x) + y\bigr) = 2x + f(y).$$

10. Найдите все натуральные числа n, для которых существуют многочлены $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ степени n, такие что вещественные корни многочлена $P(Q(x))$ образуют непостоянную арифметическую прогрессию длины n^2.

Двадцать четвертый Российский Фестиваль юных математиков

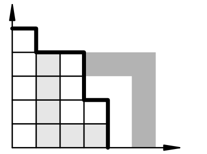
Анапа, 8.10.2013

Лига стратегий. Третий тур

1. В треугольнике ABC, $AB > AC$, M — середина дуги BAC описанной окружности, I — центр вписанной окружности ω, D — точка касания ω и стороны BC. Прямая, проходящая через D параллельно AI, вторично пересекает ω в точке P. Докажите, что AP и IM пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.

2. Дано натуральное число n. Пусть $0 = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \dots \leqslant x_n = 1$. Найдите максимальное возможное значение суммы

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i x_{i+1}(x_{i+1} - x_i).$$



3. Докажите, что количество крюков данной формы в диаграмме Юнга на 1 меньше количества таких же (отраженных) крюков в ее дополнении в первом квадранте. На рисунке изображен крюк в диаграмме Юнга и отраженный крюк в дополнении.

4. Дано $n > 2$. Каким наименьшим количеством полных графов на n вершинах можно покрыть все ребра полного графа на $2n$ вершинах?

5. Набор прямых на плоскости назовем *регулярным*, если граница хотя бы одной из частей (не обязательно ограниченной), на которые **они** разбивают плоскость, проходит по каждой из прямых набора. Докажите, что при достаточно большом N среди любых N прямых общего положения на плоскости (никакие две не параллельны, никакие три не пересекаются в одной точке) можно найти регулярный набор из 2013 прямых.

6. Даны $n > 2$ целых чисел, взаимно простых в совокупности. Разрешается прибавить к любому из чисел целое кратное любого из остальных чисел. За какое наименьшее число таких операций мы заведомо сможем добиться того, что набор чисел будет содержать хотя бы одну единицу?

7. Определим функцию $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ с помощью соотношений

$$f(1) = 1, \qquad f(n+1) = f(n) + 2^{f(n)} \quad \text{при всех} \quad n \in \mathbb{N}$$

Докажите, что числа $f(1)$, $f(2)$, …, $f(3^{2013})$ дают разные остатки при делении на 3^{2013}.

8. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Перпендикуляр, восставленный в точке B к прямой BC, пересекает серединный перпендикуляр к отрезку AB в точке P. Перпендикуляр, восставленный в точке C к прямой BC, пересекает серединный перпендикуляр к отрезку AC в точке Q. Точка T — центр описанной окружности треугольника POQ. Докажите, что прямая AT касается описанной окружности треугольника ABC.

9. Найдите все такие функции $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, что при всех $x, y \geqslant 0$

$$f\bigl(2f(x) + y\bigr) = 2x + f(y).$$

10. Найдите все натуральные числа n, для которых существуют многочлены $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ степени n, такие что вещественные корни многочлена $P(Q(x))$ образуют непостоянную арифметическую прогрессию длины n^2.

Двадцать четвертый Российский Фестиваль юных математиков

Анапа, 9.10.2013

Лига стратегий. Четвертый тур

1. Докажите, что в турнире с $2n$ вершинами найдется любое подвешенное ориентированное дерево на $n+1$ вершинах.

2. Последовательность $1 = x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots$ положительных чисел удовлетворяет следующему условию: для всякого натурального n найдутся натуральные p, q, такие что $p \leqslant n \leqslant q$ и

$$x_{p+1} + \ldots + x_{q+1} \leqslant 0,99(x_p + \ldots + x_q).$$

Докажите, что $x_1 + \ldots + x_n < 200$ при всех n.

3. Докажите, что для любого нечетного простого p найдется такое целое n, что сравнение $n^5 + n^4 - 3 \equiv x^2 \pmod p$ не имеет решений.

4. Будем говорить, что две триангуляции выпуклого n-угольника ортогональны, если у них нет ни одной общей диагонали. Докажите, что все триангуляции с двумя ушами имеют одинаковое количество ортогональных.

5. Пусть n, m и a — натуральные числа, p — простое, $a > p+1$. Докажите, что многочлен $x^n(x-a)^m + p$ нельзя представить в виде произведения двух непостоянных многочленов с целыми коэффициентами.

6. Пусть AK — биссектриса неравнобедренного треугольника ABC, M — середина дуги BAC его описанной окружности ω. Луч MK вторично пересекает окружность ω в точке A'. Касательные к ω в точках A и A' пересекаются в точке T. Точка R такова, что $RA' \perp A'K$, $RA \perp AK$. Докажите, что точки K, R, T лежат на одной прямой.

7. Даны неотрицательные вещественные числа a, b, c, d такие, что $a+b+c+d=2$. Докажите, что

$$ab(a^2+b^2+c^2) + bc(b^2+c^2+d^2) + cd(c^2+d^2+a^2) + da(d^2+a^2+b^2) \leqslant 2.$$

8. Докажите, что множества решений систем уравнений совпадают:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \dfrac{x}{x^2+y^2}, \\ 2xy + \dfrac{y}{x^2+y^2} = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^3 - 3xy^2 + 3y = 1, \\ 3x^2y - 3x - y^3 = 0. \end{cases}$$

9. В остроугольном треугольнике треугольника ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Точка H — ортоцентр, а точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Точка K — ортоцентр треугольника AOB. Докажите, что прямая HK проходит через середину отрезка A_1B_1.

10. Длины ребер параллелепипеда равны $2a$, $2b$, $2c$. Докажите, что равные шары с центрами в вершинах параллелепипеда радиуса $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ покрывают параллелепипед целиком.

Двадцать четвертый Российский Фестиваль юных математиков

Анапа, 9.10.2013

Лига стратегий. Четвертый тур

1. Докажите, что в турнире с $2n$ вершинами найдется любое подвешенное ориентированное дерево на $n+1$ вершинах.

2. Последовательность $1 = x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots$ положительных чисел удовлетворяет следующему условию: для всякого натурального n найдутся натуральные p, q, такие что $p \leqslant n \leqslant q$ и

$$x_{p+1} + \ldots + x_{q+1} \leqslant 0,99(x_p + \ldots + x_q).$$

Докажите, что $x_1 + \ldots + x_n < 200$ при всех n.

3. Докажите, что для любого нечетного простого p найдется такое целое n, что сравнение $n^5 + n^4 - 3 \equiv x^2 \pmod p$ не имеет решений.

4. Будем говорить, что две триангуляции выпуклого n-угольника ортогональны, если у них нет ни одной общей диагонали. Докажите, что все триангуляции с двумя ушами имеют одинаковое количество ортогональных.

5. Пусть n, m и a — натуральные числа, p — простое, $a > p+1$. Докажите, что многочлен $x^n(x-a)^m + p$ нельзя представить в виде произведения двух непостоянных многочленов с целыми коэффициентами.

6. Пусть AK — биссектриса неравнобедренного треугольника ABC, M — середина дуги BAC его описанной окружности ω. Луч MK вторично пересекает окружность ω в точке A'. Касательные к ω в точках A и A' пересекаются в точке T. Точка R такова, что $RA' \perp A'K$, $RA \perp AK$. Докажите, что точки K, R, T лежат на одной прямой.

7. Даны неотрицательные вещественные числа a, b, c, d такие, что $a+b+c+d=2$. Докажите, что

$$ab(a^2+b^2+c^2) + bc(b^2+c^2+d^2) + cd(c^2+d^2+a^2) + da(d^2+a^2+b^2) \leqslant 2.$$

8. Докажите, что множества решений систем уравнений совпадают:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \dfrac{x}{x^2+y^2}, \\ 2xy + \dfrac{y}{x^2+y^2} = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^3 - 3xy^2 + 3y = 1, \\ 3x^2y - 3x - y^3 = 0. \end{cases}$$

9. В остроугольном треугольнике треугольника ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Точка H — ортоцентр, а точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Точка K — ортоцентр треугольника AOB. Докажите, что прямая HK проходит через середину отрезка A_1B_1.

10. Длины ребер параллелепипеда равны $2a$, $2b$, $2c$. Докажите, что равные шары с центрами в вершинах параллелепипеда радиуса $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ покрывают параллелепипед целиком.

Двадцать четвертый Российский Фестиваль юных математиков

Анапа, 10.10.2013

Финал

1. При каких натуральных n уравнение $[x]+[2x]+[3x]+\ldots+[nx]=2013n$ имеет решение в вещественных числах?

2. Пусть x и y натуральные числа ($y<x$), такие что x^2+y^2-2 делится на x^2-y^2. Докажите, что числа x^2+y^2-2 и x^2-y^2 имеют одинаковые наборы простых делителей.

3. Дан треугольник ABC со сторонами $a<b<c$. Точки D, E, F — середины сторон BC, CA, AB соответственно. Прямая ℓ пересекает стороны BC, CA, AB соответственно в точках P, Q, R. Докажите, что $DP+EQ+FR\geqslant\sqrt{ab}$.

4. Дано иррациональное число x. Всегда ли верно, что для всех достаточно больших n среди чисел x, $2x$, $\ldots$, nx найдется число, дробная часть которого отличается от $1/2$ меньше, чем на $1/\sqrt{n}$?

5. В двусвязном графе есть полное паросочетание. Докажите, что оно не одно.

6. Пусть BL — биссектриса треугольника ABC. Точки M и N — середины отрезков AL и LC соответственно. На сторонах AB и BC выбраны соответственно такие точки P и Q, что $\angle QAC=\angle ABM$ и $\angle PCA=\angle CBN$. Прямые AQ и BM пересекаются в точке D, а прямые CP и BN пересекаются в точке E. Докажите, что точки P, Q, E и D лежат на одной окружности.

7. Вдоль прямой стоят n грузов, масса каждого — число из $(0,1)$. Блок — это любой набор подряд стоящих грузов, масса блока — это сумма масс его грузов. Докажите, что при любом k ($1\leqslant k\leqslant n$) грузы можно разбить на k непересекающихся блоков так, что максимальная из масс блоков не превосходит минимальной, увеличенной на 1.

8. Числа x_1, x_2, $\ldots$, x_n больше 1 и при этом $(x_1-1)(x_2-1)\ldots(x_n-1)=1$. Докажите, что

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k+2x_{k+1}+3x_{k+2}+\ldots+(n-1)x_{k+n-2}}\leqslant\frac{1}{n-1}.$$

(Индексы берутся по модулю n.)

9. Рассмотрим все конечные последовательности $a_1=0$, a_2, $\ldots$, a_n неотрицательных целых чисел, удовлетворяющие следующим свойствам.

1) $a_k\leqslant F_k+1$ при $k>1$. Здесь $F_2=0$, а при $k\geqslant 3$ через F_k обозначено количество возрастающих участков фрагмента a_1, $\ldots$, a_{k-1} этой последовательности, т. е. число таких номеров $i\in[1,k-2]$, для которых $a_i<a_{i+1}$.

2) Ни для каких i, j, k, $1\leqslant i<j<k\leqslant n$, не могут быть одновременно выполнены неравенства $a_j<a_i<a_k$.

Докажите, что количество таких последовательностей равно $\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)$.

10. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны CA за точку A выбрана точка K, такая что $AK=AB$. Точка M — середина дуги AB описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точки C. Прямые KM и AB пересекаются в точке P. Аналогичным образом (поменяв местами точки A и C в конструкции) на прямой BC строится точка Q. Докажите, что прямая PQ проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

Двадцать четвертый Российский Фестиваль юных математиков

Анапа, 10.10.2013

Финал

1. При каких натуральных n уравнение $[x]+[2x]+[3x]+\ldots+[nx]=2013n$ имеет решение в вещественных числах?

2. Пусть x и y натуральные числа ($y<x$), такие что x^2+y^2-2 делится на x^2-y^2. Докажите, что числа x^2+y^2-2 и x^2-y^2 имеют одинаковые наборы простых делителей.

3. Дан треугольник ABC со сторонами $a<b<c$. Точки D, E, F — середины сторон BC, CA, AB соответственно. Прямая ℓ пересекает стороны BC, CA, AB соответственно в точках P, Q, R. Докажите, что $DP+EQ+FR\geqslant\sqrt{ab}$.

4. Дано иррациональное число x. Всегда ли верно, что для всех достаточно больших n среди чисел x, $2x$, $\ldots$, nx найдется число, дробная часть которого отличается от $1/2$ меньше, чем на $1/\sqrt{n}$?

5. В двусвязном графе есть полное паросочетание. Докажите, что оно не одно.

6. Пусть BL — биссектриса треугольника ABC. Точки M и N — середины отрезков AL и LC соответственно. На сторонах AB и BC выбраны соответственно такие точки P и Q, что $\angle QAC=\angle ABM$ и $\angle PCA=\angle CBN$. Прямые AQ и BM пересекаются в точке D, а прямые CP и BN пересекаются в точке E. Докажите, что точки P, Q, E и D лежат на одной окружности.

7. Вдоль прямой стоят n грузов, масса каждого — число из $(0,1)$. Блок — это любой набор подряд стоящих грузов, масса блока — это сумма масс его грузов. Докажите, что при любом k ($1\leqslant k\leqslant n$) грузы можно разбить на k непересекающихся блоков так, что максимальная из масс блоков не превосходит минимальной, увеличенной на 1.

8. Числа x_1, x_2, $\ldots$, x_n больше 1 и при этом $(x_1-1)(x_2-1)\ldots(x_n-1)=1$. Докажите, что

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k+2x_{k+1}+3x_{k+2}+\ldots+(n-1)x_{k+n-2}}\leqslant\frac{1}{n-1}.$$

(Индексы берутся по модулю n.)

9. Рассмотрим все конечные последовательности $a_1=0$, a_2, $\ldots$, a_n неотрицательных целых чисел, удовлетворяющие следующим свойствам.

1) $a_k\leqslant F_k+1$ при $k>1$. Здесь $F_2=0$, а при $k\geqslant 3$ через F_k обозначено количество возрастающих участков фрагмента a_1, $\ldots$, a_{k-1} этой последовательности, т. е. число таких номеров $i\in[1,k-2]$, для которых $a_i<a_{i+1}$.

2) Ни для каких i, j, k, $1\leqslant i<j<k\leqslant n$, не могут быть одновременно выполнены неравенства $a_j<a_i<a_k$.

Докажите, что количество таких последовательностей равно $\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)$.

10. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны CA за точку A выбрана точка K, такая что $AK=AB$. Точка M — середина дуги AB описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точки C. Прямые KM и AB пересекаются в точке P. Аналогичным образом (поменяв местами точки A и C в конструкции) на прямой BC строится точка Q. Докажите, что прямая PQ проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.