Решения задач 1 тура

Лига стратегий

1. Разберем два случая:

1°. p и q оба нечетные. Тогда сумма $[k/p]+[k/q]$ имеет ту же четность, что и сумма остатков k от деления на p и q. Заметим, что пара остатков k от деления на p и q пробегает все варианты, так как p и q взаимно просты. Тогда $\sum\limits_{k=0}^{pq-1}(-1)^{[k/p]+[k/q]} = \sum\limits_{a=0}^{p-1}\sum\limits_{b=0}^{q-1}(-1)^{a+b} = \sum\limits_{a=0}^{p-1}(-1)^a\sum\limits_{b=0}^{q-1}(-1)^b = 1$

2°. p и q разной четности.

$$\sum_{k=0}^{pq-1}(-1)^{[k/p]+[k/q]} = \sum_{k=0}^{pq-1}(-1)^{[(pq-1-k)/p]+[(pq-1-k)/q]} = \sum_{k=0}^{pq-1}(-1)^{p+q+[(-1-k)/p]+[(-1-k)/q]}$$

Числа $[\frac{k}{p}]$ и $[\frac{-1-k}{p}]$ всегда разной четности, поэтому $[\frac{k}{p}]+[\frac{k}{q}]$ и $p+q+[\frac{-1-k}{p}]+[\frac{-1-k}{q}]$ тоже разной четности, а следовательно, эти две суммы противоположны. А, значит, равны 0.

2. Пусть f_i — количество способов покрасить клеточки полоски длины i в белый и зеленый цвет так, чтобы первая и последняя клетка были зелеными и не было подряд 21 белой клетки. Пронумеруем вершины многоугольника от 1 до 2013. Рассмотрим хорошую раскраску вершин. Пусть a и b первая и последняя зеленая вершины. На короткой дуге между вершинами a и b расположено не более 20 белых. Тогда несложно понять, что количество хороших раскрасок равно $\sum_{k=0}^{20}(k+1)f_{2013-k}$. Чтобы подсчитать четность этой суммы, достаточно подсчитать четность f_i. Очевидно, $f_i = f_{i-1}+\ldots+f_{i-21}$, откуда видно, что сумма $f_i+f_{i-1}+\ldots+f_{i-21}$ четна. Аналогично сумма $f_{i+1}+f_i+\ldots+f_{i-20}$ четна, следовательно f_{i+1} и f_{i-21} одной четности. Начальные значения $f_1=f_2=1$, и очевидно $f_3, \ldots, f_{22}$ четные. Отсюда получаем, что f_i нечетное, если i дает остаток 1 или 2 от деления на 22.

$$\sum_{k=0}^{20}(k+1)f_{2013-k} \equiv 2004+2005 \equiv 1.$$

3. Ответ: $f\equiv 0$, $f\equiv 1$.

Обозначим $x+f(y)^2 = z$, $y-f(y)^2 = g(y)$. Тогда

$$f(z) = f(z+g(y))^2 \tag{1}$$

при всех вещественных z, y. Отсюда $f(z)\geqslant 0$ и $f(z-ng(y)) = f(z)^{2^n}$ при всех целых n.

Предположим, что $g(y)$ и $g(t)$ рациональны. Тогда $ng(y) = mg(t)$ при некоторых целых (не равных одновременно 0) n, m и потому $f(z)^{2^n} = f(z)^{2^m}$ при всех z. Это возможно, либо если $f(z)\in\{0,1\}$ при всех z, либо если $n=m$.

В первом случае вследствие (1) мы для всех z и s имеем соотношение $f(z) = f(z+g(s))$, т.е. $g(s)$ — период функции f. При этом $g(s) = s-f(s)^2 = s-f(s)\in\{s, s-1\}$. При $s=1/2$ это влечет, что $1/2$ — период f, тогда 1 — период f, а поскольку и $g(s)$ — период, мы получаем, что всякое число s будет периодом f, поскольку $s\in\{g(s), g(s)+1\}$. Значит, функция f постоянна, это дает два ответа.

Во втором случае получаем, что $g(y) = g(t)$ (в предположении, что $g(y)$ и $g(t)$ рациональны). Обозначим $f(0) = c\in\mathbb{Q}$. При $y=0$ получаем $g(0) = -c^2\in\mathbb{Q}$. Далее, $f(z+nc^2) = f(z)^{2^n}$, $f(nc^2) = c^{2^n}$, $g(nc^2) = nc^2 - c^{2^{n+1}}\in\mathbb{Q}$, так что $nc^2 - c^{2^{n+1}} = -c^2$ при всех целых n. Это возможно только если $c=0$, но тогда получаем $f(z) = f(z)^2$ и мы возвращаемся к первому случаю.

4. Выберем максимальную последовательность вершин $S = (a_1, \ldots, a_{3k})$, для которой между a_1 и a_{3k} имеется не менее k путей, проходящих только по вершинам a_i, у которых суммы дают различные остатки по модулю n. Множество различных сумм $(\mod n)$ обозначим через A. Изначально, если возможно, выберем вершины так, чтобы между a_1 и a_3 были пути разной четности.

Если при этом оказалось, что $k=n$, то задача решена: Возьмем вершину $b\notin S$ и рассмотрим n циклов вида $b\to a_1\to\cdots\to a_{3k}\to b$. Поскольку мы умеем строить пути, ведущие из a_1 в a_{3k} для которых суммы имеют все возможные остатки, то для какого-то из циклов сумма разделится на n.

Пусть оказалось, что $k<n$. Обозначим через $m(cd)$ число на ребре cd. Все вычисления и числа мы выполняем по модулю n.

Рассмотрим все тройки вершин x, y, $z \notin S$. Так как последовательность S максимальна, мы не можем добавить к ней еще три вершины и сделать z вершиной a_{3k+3}, но мы попробуем. К каждому пути a_1–a_{3k} мы добавим ребро $a_{3k}x$ и далее либо путь xyz, либо ребро xz. Разность добавленных чисел равна $m(xy) + m(yz) - m(xz)$. Если таким образом не получилось увеличить количество различных остатков, то для любого $b \in A$ множество A содержит все числа, отличающиеся от b на $(m(xy) + m(yz) - m(xz))r$ и, аналогично, отличающиеся от b на $(m(xy) - m(yz) + m(xz))r$, а следовательно, и на $(2m(xy))r$.

Рассмотрим минимальное $t > 0$, такое что если число $b \in A$, то и $(b+t) \bmod n \in A$. Мы уже получили, что $2m(xy)$ подходит, за исключением минимальности, следовательно, $2m(xy) \vdots t$ и $n \vdots t$. Так как A содержит не все возможные остатки, то оно не содержит не менее n/t остатков. Значит, $k \leqslant n - n/t$.

1°. t – нечетное. Тогда $t > 1$, иначе A содержит либо все остатки, либо ни одного. Поскольку $k < n$, в последовательность S входят не более $3n$ вершин, значит, в графе имеется существенно больше $1000n/t$ остальных вершин. При этом числа $m(xy)$ на ребрах между ними кратны t. Таким образом, ограничившись графом на вершинах не лежащих в S, и сократив числа на ребрах, мы сводим задачу к меньшему n.

2° t – четное и больше 2. Тогда чисел осталось $1000n - 3k \geqslant 1000n - 3(n - n/4) \geqslant 1000n/(t/2)$. Тогда поступим аналогично п. 1° так как все ребра делятся на $t/2$.

3° $t = 2$. Значит, в A все остатки одной четности, а следовательно, мы не могли выбрать начальные вершины так, чтобы изначально между a_1 и a_3 были пути разной четности. Следовательно, в любом треугольнике сумма двух сторон той же четности что и третья, т.е. сумма ребер в каждом треугольнике четная. Тогда граф распадается на две клики (возможно пустые), в которых внутри четные ребра, а между ними нечетные. Тогда в какой-то клике вершин хотя бы $1000n/2$. Опять свели задачу к меньшему n.

5. Ответ: $3/4$, достигается, например, при $x_1 = x_2 = 1/2$, $x_k = 0$ при $k \geqslant 3$.

Не умаляя общности будем считать, что $x_1 \leqslant x_2$, тогда $x_{2013}x_1 \leqslant x_{2013}x_2$ и

$$\sum_{i=1}^{2013} x_i x_{i+1} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{1006} x_{2i-1}\right)\left(\sum_{i=1}^{1006} x_{2i}\right) = y(1-y) \leqslant \frac{1}{4}.$$

Теперь заметим, что для чисел $y_1, \ldots, y_n$ в отрезке $[0,1]$ имеем

$$\prod (1 - y_i) = 1 - \sum y_i \prod_{k=1}^{i-1} (1 - y_k) \geqslant 1 - \sum y_i.$$

Применяя это неравенство к $y_i = x_i x_{i+1}$ и оценивая $\sum y_i \leqslant 1/4$ получаем требуемое.

6. Сделав подходящее аффинное преобразование, будем считать, что исходный треугольник (обозначим его через ABC) правильный. Пусть $\vec{AB} = 2\vec{u}$, $\vec{AC} = 2\vec{v}$. Рассмотрим замощение плоскости параллельными сдвигами треугольника ABC. У каждого треугольника замощения отметим его вершины и середины всех его сторон. Множество отмеченных точек обозначим через S.

Рассмотрим параллелограмм P, образованный векторами $\vec{u}$ и $\vec{v}$. Заметим, что множество S является в точности множеством точек вида $\{m\vec{u} + n\vec{u} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$.

Для каждого вектора $\vec{w} = \vec{AX}$, где точка X лежит внутри параллелограмма P, рассмотрим множество $S(\vec{w})$, полученное из множества S параллельным переносом на вектор $\vec{w}$. Заметим, что каждый параллельный сдвиг треугольника ABC содержит либо одну, либо три точки множества $S(\vec{w})$.

Обозначим объединение всех областей, покрытых нечетное число раз, через Γ. Для каждого множества $S(\vec{w})$ пересечение $S(\vec{w}) \cap \Gamma$ непусто. Тогда образ множества Γ при отображении

$$a\vec{u} + b\vec{u} \ \mapsto \ (a \bmod 1)\vec{u} + (b \bmod 1)\vec{v}$$

покроет параллелограмм P, поэтому площадь Γ не меньше $\frac{1}{2}$.

7. Обозначим углы треугольника через α, β и γ соответственно. Заметим, что четырехугольник $APOQ$ вписанный. Действительно,

$$\angle POQ = \angle POA + \angle AOQ = \angle AOB - \angle POB + \angle AOC - \angle QOC = 2\gamma - \beta + 2\beta - \gamma = 180^\circ - \alpha,$$

поэтому $\angle PAQ + \angle POQ = 180^\circ$. Рассмотрим на луче BC такую точку T, что $QT = QC$. Заметим, что $\angle QTC = \angle QOC = \gamma$, поэтому четырехугольник $QOTC$ вписанный. Тогда четырехугольник $POTB$ также вписанный, $\angle PTB = \angle POB = \beta$ и точка T лежит на отрезке BC. Кроме того, $\angle PQT = \angle PQO + \angle OQT = \angle PAO + \angle OCT = 2\beta - \beta = \beta$. Аналогично, $\angle QPT = \gamma$, следовательно, $\angle PTQ = \alpha$. Это означает, что описанные окружности треугольников APQ и PTQ симметричны относительно прямой PQ. При этом, $\angle QTC = \angle QOC = \gamma = \angle QPT$. Поэтому описанная окружность треугольника PTQ касается прямой BC. Следовательно, прямая, симметричная прямой BC относительно прямой PQ касается описанной окружности треугольника APQ.

8. Заметим, что точки O_1, O_2, O_1' и O_2' лежат в одной плоскости. Обозначим ее через α. Радикальную плоскость сфер ω_1 и ω_2 обозначим через β, а радикальную плоскость сфер ω_1' и ω_2' — через β'. Из условия следует, что плоскости β и β' содержат прямую ℓ. При этом, $\beta \perp \alpha$ и $\beta' \perp \alpha$, поэтому либо $\beta = \beta'$, либо $\ell \perp \alpha$.

Обозначим середины отрезков AB и CD через M и N соответственно. Они одновременно лежат на прямой ℓ и в плоскости α, и при этом различны. Из этого следует, что прямая ℓ лежит в плоскости α и $\beta = \beta'$.

Пусть K — точка пересечения прямых O_1O_2' и O_2O_1', а r_1, r_2, r_1' и r_2' — радиусы соответствующих сфер. Заметим, что ${O_1O_1'}^2 - O_1K^2 - O_1'K^2 = {O_2O_2'}^2 - O_2K^2 - O_2'K^2$. Так как $\omega_1 \perp \omega_1'$, то $r_1^2 + r_1'^2 = {O_1O_1'}^2$. Так как точка K имеет равную степень относительно сфер ω_1 и ω_2, а также сфер ω_1' и ω_2', то $r_1^2 - r_2^2 = O_1K^2 - O_2K^2$ и $r_1'^2 - r_2'^2 = O_1'K^2 - O_2'K^2$. Комбинируя все получившиеся равенства, получаем, что $r_2^2 + r_2'^2 = {O_2O_2'}^2$ и $\omega_2 \perp \omega_2'$.

9. Пусть $p = 2x^2 + 3y^2$. Тогда $x \not\vdots\, 3$, а y нечетно, так что по модулю 3 число p дает остаток 2, а по модулю 8 — 3 или 5. Это как раз соответствует остаткам 5 и 11 при делении на 24.

Пусть p дает при делении на 24 дает остаток 5 или 11. Тогда для символа Лежандра, применяя квадратичный закон взаимности и дополнительные теоремы к нему, имеем

$$\left(\frac{-6}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2} \cdot (-1) \cdot (-1)^{(p-1)/2} \cdot (-1) = 1.$$

Таким образом, число -6 — квадратичный вычет по модулю p, так что $(x^2+6) \vdots\, p$ при некотором x. Тогда и $2(x/2)^2 + 3 \cdot 1^2$ кратно p. Рассмотрим числа $0, 1, \ldots, m$, где $m^2 < p < (m+1)^2$. Для каждого из этих чисел r выражение $2(xr/2)^2 + 3r^2$ будет кратно p. Среди остатков $(xr/2)$ по модулю p найдутся два, скажем, $xr_1/2$ и $xr_2/2$, отличающиеся не более чем на $p/(m+1) < \sqrt{p}$. Это означает, что вычет числа $\pm x(r_1 - r_2)/2$ по модулю p будет от 0 до m. Таким образом, для $X = \pm x(r_1 - r_2)/2 \bmod p$, $Y = \pm(r_1 - r_2)$ будем иметь $0 < 2X^2 + 3Y^2 < 5p$, и $(2X^2 + 3Y^2) \vdots\, p$. Разберем случаи. Если $2X^2 + 3Y^2 = p$, мы достигли успеха. Если $2X^2 + 3Y^2 = 4p$, то рассматривая остатки по модулю 4 получаем, что X и Y четны, $p = 2(X/2)^2 + 3(Y/2)^2$. Равенство $2X^2 + 3Y^2 = 2p$ невозможно по модулю 3, а $2X^2 + 3Y^2 = 3p$ — по модулю 9. Все случаи разобраны, задача решена.

10. Будем считать длину окружности пирога единичной и понимать ее как $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (вещественные числа по модулю 2π). Пусть при этом середина переворачиваемого куска это 0 (то есть переворачивание это отображение $x \to -x$, поворот это $x \to x + \beta$). Выберем такое большое N, что

$$|(N\beta) \pmod{2\pi}| < \alpha/4$$

(если β рационально, то просто пусть $N\beta$ будет целым), и, кроме того, точки $\beta, 2\beta, \ldots, N\beta$ разбивают окружность на дуги длин меньше, чем $\alpha/2$. Рассмотрим точки $\pm x + k\beta$, $k = -(N-1)..N$, где $|x| < \alpha/4$. Это множество точек переходит в себя при нашем преобразовании (потому что точки $\pm x + N\beta$ подвергнутся перевороту), так что любая точка этого множества $N!$-периодична. Осталось заметить, что такие множества покроют всю окружность.

Лига тактик

1. Ответ: у 11. Пример получится, если мы выделим 11 шахматистов, которые сыграют друг с другом вничью и проиграют всем остальным. Результат остальных партий можно выбрать произвольно.

Теперь покажем, что больше 11 шахматистов набрать ровно 5 очков не могли. Предположим противное, пусть их хотя бы 12. Между собой они сыграли 66 партий, в каждой было разыграно очко, т.е. в сумме эти шахматисты набрали не меньше 66 очков. Но если каждый набрал ровно 5 очков, то всего они в этих партиях набрали вместе не более 60 очков. Противоречие.

2. Из условия следует, что $m^2+2n \geqslant n^2-2m$, откуда $(m+1)^2 \geqslant (n-1)^2$. Значит, $n \leqslant m+2$. Аналогично получаем, что $m \leqslant n+2$. Так как условие симметрично относительно m и n, мы можем предположить, что $n \geqslant m$. Тогда имеем три случая: $n = m$, $n = m+1$ и $n = m+2$. Разберем их. В первом случае мы получаем, что $(m+2) \vdots (m-2)$, следовательно, $4 \vdots (m-2)$. Мы получаем в это случае решения $(1,1)$, $(3,3)$, $(4,4)$, $(6,6)$. Если $n = m+1$, то мы получаем, что $(2m+1) \vdots (m^2+1)$. Это возможно только при $m = 2$, но это не является решением, так вторая дробь не целая. Наконец, если $n = m+2$, то мы получаем, что $(8m+8) \vdots (m^2-2m-4)$. При $m > 11$ это невозможно, так как второе число больше первого. Остальные случаи надо просто перебрать и получатся ответы $(2,4)$, $(3,5)$, $(4,6)$.

3. См. решение задачи 2 из лиги стратегий.

4. Ответ: 24. Заметим, что первое условие означает, что сумма чисел на противоположных ребрах равна 2. Обозначим три числа, стоящих на трех ребрах, выходящих из одной вершины, через a, b и c. Остальные три числа — это $2-a$, $2-b$ и $2-c$. Из второго условия мы получаем, что $a^2+b^2+c^2+(2-a)^2+(2-b)^2+(2-c)^2 = 12$. Преобразовывая, имеем $a^2+b^2+c^2-2(a+b+c) = 0$. Теперь рассмотрим сумму кубов: $a^3+b^3+c^3+(2-a)^3+(2-b)^3+(2-c)^3 = 24+6(a^2+b^2+c^2-2(a+b+c)) = 24$.

5.

$$\frac{1}{1+a^2+(b+1)^2}+\frac{1}{1+b^2+(c+1)^2}+\frac{1}{1+c^2+(a+1)^2}=$$
$$=\frac{1}{2+2b+a^2+b^2}+\frac{1}{2+2c+b^2+c^2}+\frac{1}{2+2a+a^2+c^2}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2+2b+2ab}+\frac{1}{2+2c+2bc}+\frac{1}{2+2a+2ac}=\frac{1}{2+2b+2ab}+\frac{ab}{2ab+2+2b}+\frac{b}{2b+2ab+2}=\frac{1}{2}.$$

6. Решение аналогично решению задачи 6 лиги стратегий.

7. Заметим, во-первых, что отрезки a_1 и a_2 равны, так как получившийся при проведении описанных в условии прямых параллелограмм — ромб (его диагональ AA_1 — биссектриса). Обозначим теперь соответствующие стороны треугольника ABC через a, b и c. Так как $BA_1 : A_1C = c : b$ (по свойству биссектрисы) из теоремы Фалеса имеем, что $a_1 = a_2 = \frac{bc}{b+c}$. Тогда $a_1 + a_2 = \frac{2bc}{b+c} \leqslant \frac{b+c}{2}$ (по неравенству между средним арифметический и средним гармоническим). Складывая три таких неравенства, получаем требуемое.

8. См. решение задачи 7 из лиги стратегий

9. См. решение задачи 1 из лиги стратегий

10. Решение содержится в решении задачи 4 лиги стратегий.

Решения задач 2 тура

Лига стратегий

1. Нам понадобится следующая стандартная лемма. Если все степени вершин планарного графа не меньше 3, то в нем есть простой цикл не более чем из пяти ребер.

Доказательство: Можно считать, что граф связный. Воспользуемся формулой Эйлера $V-R+G=2$. Подсчитаем двумя способами количество пар «грань — ребро этой грани», обозначим это количество через N. С одной стороны, $N \leqslant 2R$. С другой стороны, если утверждение неверно, то $N \geqslant 6G$. Значит, $G \leqslant \frac{1}{3}R$. Так как все степени не меньше 3, то $2R \geqslant 3V$. Таким образом, $V+G \leqslant R$, что противоречит формуле Эйлера.

Перейдем к решению задачи. Будем доказывать утверждение задачи для графов, в которых минимальный цикл имеет длину не меньше $10d+100$. Тогда можно считать, что граф связный. Каждую вершину степени больше 1 дополним до вершины степени d, добавив при необходимости к ней несколько ребер-листов. Тогда в графе будет два типа вершин — A (множество вершин степени d) и L (все вершины степени 1).

Пусть теперь G — минимальный по количеству вершин контрпример к утверждению задачи. Пусть $\tilde{A}$ — индуцированный подграф графа G на множестве A. Степень вершины в графе $\tilde{A}$ назовем $\tilde{A}$-степенью.

Утверждение 1. Подграф $\tilde{A}$ не имеет висячих вершин.

Действительно, если BM — ребро графа $\tilde{A}$, где M — висячая вершина, то в графе G у этой вершины есть еще $k-1$ лист. Если удалить эти листы, полученный граф будет удовлетворять условию задачи, но уже не будет контрпримером, покрасим его в $2d-1$ цвет. Теперь вернем назад эти листья и попытаемся покрасить соответствующие ребра. Очевидно, что при докраске мы не можем использовать цвет ребра BM и всех остальных ребер, выходящих из вершины B, — всего k запретов. Поэтому мы сумеем покрасить все эти $k-1$ ребер. Это противоречит тому, что граф G является контрпримером.

Утверждение 2. В графе G есть простой путь длины $2d+20$ (возможно, его начальная и конечная вершины совпадают), у которого начальная и конечная вершины имеют $\tilde{A}$-степень не меньше 3, а все остальные вершины — $\tilde{A}$-степени 2.

Доказательство. Временно «удалим» из графа $\tilde{A}$ все вершины степени 2, а именно, последовательно перебирая вершины степени 2, будем выполнять следующую операцию — если AB и BC — ребра графа $\tilde{A}$, где B — вершина степени 2, то уберем эти ребра и вершину, и добавим вместо них ребро AC. В результате этих действий мы получим плоский граф, в котором все вершины имеют степень не меньше 3. По лемме в нем есть простой цикл не более чем из 5 ребер. В графе G ему соответствует цикл из не менее чем $10d+100$ вершин. Такое несоответствие в количестве вызвано тем, что мы как бы убрали вершины $\tilde{A}$-степени 2. Возвращая их обратно, мы получим, что хотя бы на одном из ребер цикла, вместе с концами, находится не менее $2d+20$ вершин.

Пронумеруем средние вершины пути, они будут $x_1, \ldots, x_{2d+19}$. Выкинем из графа G вершины $x_2, \ldots, x_{2d+18}$ вместе с их листьями. Этот граф меньше минимального контрпримера, следовательно, можно покрасить его ребра. Теперь вернем обратно удаленные ребра и вершины и проверим, что можно докрасить ребра в соответствии с требованиями. Это даст противоречие с тем, что граф G является контрпримером.

Итак, мы имеем простой путь $A, x_1, \ldots, x_{2d+19}, B$, на внутренних вершинах которого висят листья, так что каждая вершина x_i имеет большую степень d. Нам нужно покрасить ребра этого пути в $2d-1$ цвет согласно условию задачи, при этом на концах пути мы уже имеем по k ограничений на цвет. Начнем последовательно красить ребра, двигаясь от A к B, как в утверждении 1. Окрашивая ребра, выходящие из вершины x_i, мы должны правильно назначить цвет ребра $x_i x_{i+1}$, чтобы управлять (будущими) запретами для окраски ребер, выходящих из x_{i+1}, и в перспективе (когда мы дойдем до конца пути) подстроиться под «встречные», имеющиеся в вершине B. Если читатель все еще с нами, он без труда восстановит детали этого процесса.

2. Рассмотрим прямую $\ell = \{x=y=0\}$ и все гиперболоиды вида $c(x^2+y^2)=z^2+1$, $c>0$. Ясно, что каждая точка пространства лежит либо ровно на одном из этих гиперболоидов, либо на прямой ℓ. Для каждого гиперболоида рассмотрим одно из двух семейств скрещивающихся прямых, на которые он разбивается. Прямые разных гиперболоидов не будут параллельны (их бесконечно удаленные точки лежат на конусах $c(x^2+y^2)=z^2$, каковые конуса общих бесконечных точек не имеют), так что построено требуемое разбиение пространства.

3. Рассмотрим один подарок — скажем, лошадь. Разобьем все способы Деда Мороза на пары. Если лошадь лежит в отдельном мешке для некоторого способа, сопоставим ей способ, в котором она переложена в следующий по часовой стрелке мешок. Если же лошадь не единственная в своем мешке, сопоставим такому способу тот, в котором она вынута из своего мешка и положена перед ним в отдельном мешке. Все способы разбились на пары, и в каждой паре количества мешков отличаются на 1, а потому имеют разную четность. Следовательно, тех и других способов поровну.

4. Ответ: да, такое множество существует.

Построим бесконечную последовательность $1 = n_1 < n_2 < \ldots$, такую что $n_i + n_j$ свободно от квадратов при всех $i \leqslant j$. Достаточно научиться добавлять еще одно число n_{k+1} при уже выбранных $n_1, \ldots, n_k$, удовлетворяющих этому условию. Будем искать n_{k+1} в виде $n_{k+1} = 1 + Mx$, где M — подходящее число, кратное $((n_1 + \ldots + n_k + 1)!)^2$, конкретное значение M зададим позже. Для $i = 1, 2, \ldots, k$ имеем $1 + Mx + n_i = (1 + n_i)m_i$, где m_i и M взаимно просты, так что любой точный квадрат, который делит $1 + Mx + n_i$, должен быть взаимно прост с M. То же верно для $n_{k+1} + n_{k+1} = 2(1 + Mx)$. Рассмотрим большое N и все возможные $x = 1, 2, \ldots, N$. Если у нас не выходит подобрать подходящий x, то для каждого такого x найдется $p \leqslant \sqrt{MN + 1}$, взаимно простое с M, и $i \in \{1, 2, \ldots, k+1\}$ такие, что $n_i + n_{k+1}$ делится на p^2. При данных i и p найдется не более чем $N/p^2 + 1$ таких x. Таким образом, общее количество неподходящих значений x не превосходит

$$A := N(k+1) \sum_{(p,M)=1} \frac{1}{p^2} + (k+1)\sqrt{MN+1}.$$

Пусть M столь велико, что $\sum\limits_{(p,M)=1} \frac{1}{p^2} < \frac{1}{k+1}$, этого можно добиться, поскольку ряд $\sum \frac{1}{n^2}$ сходится. Наконец, пусть N достаточно большое. Тогда $A < N$ и подходящий x найдется.

5. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC ($AB > AC$). Прямые BO и CO пересекают биссектрису угла BAC в точках P и Q соответственно. Прямые BQ и CP пересекаются в точке R. Докажите, что $AR \perp BC$.

Пусть $OC \cap BR = P$, $BO \cap CR = Q$, $AP \cap OR = U$, $AP \cap BC = V$ и $OR \cap BC = D$. Заметим, что достаточно доказать, что биссектриса угла BAC делит угол $\angle RAO$ пополам. Двойное отношение $(B, C, V, D) = \dfrac{\vec{BV}}{\vec{CV}} : \dfrac{\vec{BD}}{\vec{CD}}$ равно -1. Следовательно AD биссектриса внешнего угла A, треугольника ABC. Тогда $\angle DAP = 90^2$. При этом $(O, R, U, D) = -1$. Следовательно AU делит угол RAO пополам.

6. Заметим, что если $(10, n) > 1$, то найдутся такие числа n_1, n_2 и n_3, что $n \cdot n_1 = n_2 \cdot 10^{n_3}$. Поэтому можно с самого начала считать, что $(10, m) = (10, n) = 1$.

Наша цель — сначала предъявить такое число k, для которого найдется рациональное число c, для которого $cm = \overline{m0\ldots0n0\ldots0k}$ и $cm = \overline{n0\ldots0k0\ldots0m}$.

Пусть

$$c = 10^t + \frac{10^s n + k}{m} = 10^t + \frac{10^r k + m}{n}.$$

То есть, нам нужно найти такие достаточно большие числа r и s, что число $k = \frac{10^s n^2 - m^2}{10^r m - n}$ натуральное (при этом не стоит забывать, что должно выполняться неравенство $10^s > k$).

Выберем r настолько большим, чтобы выполнялись неравенства $10^r m - n > n \cdot 10^{mn}$ и $10^r > m$. Так как $(10, 10^r m - n) = 1$, то существует такое большое число s, что $10^{s+2r} \equiv 1 \pmod{10^r m - n}$. Тогда

$$10^s n^2 \equiv 10^{s+2r} m^2 \equiv m^2,$$

поэтому число k натуральное.

Теперь, число $c = c'm$ натуральное, $cm = c'm \cdot m = m \cdot \overline{m0\ldots0n0\ldots0k}$ и $cn = c'n \cdot m = m \cdot \overline{n0\ldots0k0\ldots0m}$. Осталось заметить, что в числе mk меньше чем s цифр, в числе mn меньше чем t цифр, в числе m^2 меньше чем k цифр, а в числе km меньше чем t цифр. Поэтому числа cm и cn будут отличаться перестановкой блоков цифр.

7. Решение аналогично решению задачи 10 лиги тактик.

8. Решение 1. Из неравенства о средних $2\sqrt{(x-1)(y-1)} \leqslant (x-1)(y-1)+1$ нетрудно вывести *полезное неравенство*

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} \leqslant \sqrt{xy}.$$

Применяя полезное неравенство два раза, получаем $\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} \leqslant \sqrt{ab} + \sqrt{c-1} \leqslant \sqrt{(ab+1)c}$.

Решение 2. Дифференцированием нетрудно проверить, что функция $f(c) = t\sqrt{c} - \sqrt{c-1}$ при $t>1$ достигает на промежутке $[1,+\infty)$ минимум в точке $c_0 = \frac{t^2}{t^2-1}$. Применяя это замечание к нашему неравенству, имеем $t = \sqrt{ab-1}$, и достаточно проверить неравенство при $c = 1 + \frac{1}{ab}$, т. е. доказать, что при $a, b \geqslant 1$

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} \leqslant \sqrt{ab}.$$

При $a = 1$ это очевидно, а при $a > 1$ опять применим наше замечание для функции $f(b) = \sqrt{ab} - \sqrt{b-1}$. Получим, что достаточно проверить неравенство в точке $b = \frac{a}{a-1}$. Это легко.

9. Опустим из точки C перпендикуляры CX, CY и CZ на прямые AB, BD и AD соответственно. Так как точки C, B, X и Y лежат на одной окружности, то $\angle(XC, XY) = \angle(BC, BY)$. Аналогично, $\angle(XZ, XC) = \angle(AZ, AC)$. Тогда

$$\angle(XZ, XY) = \angle(XZ, XC) + \angle(XC, XY) = \angle(AZ, AC) + \angle(BC, BY) = \angle(CB, CA) - \angle(DB, DA).$$

Аналогично, $\angle(ZY, ZX) = \angle(CA, CD) - \angle(BA, BD)$. Тогда $\angle(XZ, XY) = \angle(ZY, ZX)$. Если точки X, Y и Z лежат на одной прямой, то четырехугольник $ABCD$ вписанный. Если нет, то треугольник $XY = YZ$. При этом, $XY = BC/\sin\angle ABD = (BC \cdot AD)/(2R)$, где R — радиус описанной окружности треугольника ABD. Аналогично, $YZ = (AB \cdot CD)/(2R)$. Поэтому $AB \cdot CD = BC \cdot AD$. Так как $AB + CD = BC + AD$, то четырехугольник $ABCD$ дельтоид.

10. Случаи, когда во всех вершинах написаны одинаковые числа, очевидны. Индукцией по числу сторон докажем, что если в вершинах n-угольника записаны 0 и 1, причем есть как 0, так и 1, то многоугольник можно триангулировать так, чтобы сумма в каждом треугольнике триангуляции равнялась бы 1 или 2. База индукции — $n = 3$ и $n = 4$ — очевидна. При $n \geqslant 5$ найдутся две последовательные вершины A и B, в которых написаны 0 и 1 соответственно. Выберем вершину C, не являющуюся соседней ни для A, ни для B. Если в C записан 0, то проведем диагональ CB, а если 1, то CA. Многоугольник разбился на два многоугольника, к которым применимо предположение индукции.

Лига тактик

1. Рассмотрим число n, представимое в виде суммы двух похожих. Если вычеркнутая цифра — не последняя, то два похожих числа оканчиваются на одну и ту же цифру. Тогда n — четное. Если вычеркнутая цифра — последняя, то два похожих числа имеют вид $10A + x$ и A, где x — вычеркнутая цифра. Тогда $n = 11A + x$, т.е. цифра x — остаток от деления n на 11. Таким образом, остаток от деления n на 11 не превосходит 9. Значит, числа вида $11A + 10$ не представимы в виде суммы двух похожих чисел, одно из которых получено из другого вычеркиванием последней цифры. Комбинируя два сделанных наблюдения, мы получаем, что числа вида $22T + 21$ не представимы в виде суммы двух похожих.

Комментарий. На самом деле, это условие является и достаточным. То есть все числа, дающие другой остаток по модулю 22, представимы в виде суммы двух похожих.

2. См. решение задачи 10 лиги стратегий.

3. См. решение задачи 3 лиги стратегий.

4. Если $n = p^k$, утверждение очевидно. Пусть $n = pqx$, где $p > q$ – различные простые числа. Положим $k = (p-q)qx$. Тогда $(n,k) = (pqx, (p-q)qx) = qx(p, p-q) = qx$, поэтому $n \bowtie k = \frac{pqx-(p-q)qx}{qx} = q$, откуда $(n, n \bowtie k) = (pqx, q) = q \neq 1$. Итак, число n не может иметь двух различных простых делителей, поэтому оно является степенью простого числа.

5. См. решение задачи 5 лиги стратегий.

6. Частное данных чисел (мы пользуемся тем, что числа различны и потому, обе разности — не нули) равно $-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ и потому является рациональным. Обозначим это частное через $-q$. Тогда $b - \sqrt{ab} = b(1-q)$, откуда имеем, что число b — рациональное. Далее, $a = q^2 b$, и мы получаем, что и число a — рациональное.

7. Рассмотрим произвольную вершину графа. Выберем два исходящих из нее ребра. Число различных 4-циклов, содержащих эти два ребра, не больше 2. Значит, через данную вершину проходит не больше шести различных 4-циклов, а всего, стало быть, количество 4 циклов не больше 450. В случае когда граф представляет собой объединение 50 независимых графов $K_{3,3}$ (полных двудольных графов с двумя долями по три вершины в каждой), оценка достигается.

8. См. решение задачи 8 лиги стратегий.

9. Ответ: $AK = 24/5$.

Продлим стороны AB и CD до пересечения в точке X. Легко понять, что точка X лежит за точкой A и точкой D. Из теоремы Фалеса для параллельных прямых AK и XC мы можем найти отрезок AX. Получаем, что $AX = 10/3$. Теперь продлим до пересечения стороны AD и BC, пусть они пересекутся в точке Y. Из соображений симметрии получаем, что $CY = AX = 10/3$. Теперь, пользуясь подобием треугольников CDY и KAY, мы найдем, что $AK = 24/5$.

10. Ответ: эта сумма равна 0.

Проверим, функция f инъективна. Действительно, если $f(a) = f(b)$, то $f(f(a)) = f(f(b))$, т. е. $a^3 = b^3$, откуда $a = b$. Теперь заметим, что $f(f(f(x))) = f(x^3)$ и в то же время $f(f(f(x))) = f^3(x)$, то есть $f^3(x) = f(x^3)$. Подставляя сюда $x = -1, 0, 1$ мы получаем, что все три значения $f(-1)$, $f(0)$ и $f(1)$ удовлетворяют уравнению $t^3 - t = 0$. То есть эти значения — это -1, 0 и 1 в некотором порядке (в силу инъективности). Это означает, что их сумма равна 0.

Решения задач 3 тура

Лига стратегий

1. Пусть N — середина дуги BC, D' — точка окружности ω, диаметрально противоположная точке D, B_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами AC и AB соответственно, H — ортоцентр треугольника треугольника DB_1C_1.

Заметим, что треугольник с вершинами в серединах дуг AB, BC и CA описанной окружности треугольника ABC положительно гомотетичен треугольнику DB_1C_1. Обозначим эту гомотетию через Γ, а ее центр — через T. При гомотетии Γ описанная окружность переходит во вписанную, $\Gamma(N) = D$, $\Gamma(M) = D'$. Также, при любой гомотетии прямая и ее образ параллельны. Тогда прямая NA переходит в прямую DP, и следовательно, $\Gamma(A) = P$. При этом, DP — высота треугольника DB_1C_1, и следовательно, дуги B_1P и C_1D' окружности ω равны.

Заметим, что точка I — ортоцентр треугольника, с вершинами в серединах дуг AB, BC и CA описанной окружности треугольника ABC. Поэтому $\Gamma(I) = H$.

Нам достаточно доказать, что прямые AP и $D'H$ пересекаются на окружности ω. Пусть X — точка пересечения прямой $D'H$ и окружности ω. Заметим, что XD' — медиана треугольника XB_1C_1 и, так как дуги B_1P и C_1D' равны, то XP симедиана треугольника XB_1C_1. Как хорошо известно, на точка пересечения касательных к описанной окружности, проведенных в вершинах, лежит на симедиане. Поэтому точки X, P и A лежат на одной прямой.

2. Для каждого $0 \leqslant i \leqslant n-1$ обозначим число $x_{i+1} - x_i$ через y_i. Тогда $\sum\limits_{i=0}^{n-1} y_i = 1$. Заметим, что

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i x_{i+1}(x_{i+1} - x_i) = -\frac{1}{3}\left(\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)^3\right) + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1} y_i^3.$$

Заметим, что

$$\sum_{i=0}^{n-1} y_i^3 \leqslant n\left(\frac{1}{n}\right)^3 = \left(\frac{1}{n}\right)^2.$$

Поэтому

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i x_{i+1}(x_{i+1} - x_i) \leqslant \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{(n-1)(n+1)}{3n^2}.$$

3. Если мы ищем крюки с рукой a и ногой b, то мы сдвигаем границу диаграммы (вместе с двумя лучами от краев по осям координат) на вектор $(a - 1/2, -b + 1/2)$ и считаем для внешних крюков точки пересечения горизонтальных сторон исходной диаграммы и вертикальных — сдвинутой, а для внутренних наоборот. Но те и другие точки пересечения, очевидно, чередуются, причем первая и последняя соответствут внешним крюкам.

4. Ответ: 6 графов.

Каждая вершина должна лежать хотя бы в трех графах, так что суммарное число вершин в графах не меньше $6n$, поэтому их не меньше шести.

Покажем, как использовать 6 графов. если n четно, разбиваем вершины на 4 группы по $n/2$ и объединяем их попарно в графы. Пусть $n = 3 + 2k$. Выделим 6 вершин a, b, c, d, e, f, оставшиеся разобьем на группы A, B, C, D по k вершин и рассмотрим графы $abdAB, bceBC, cdfCD, deaDA, efbDB, facAC$.

5. Пусть имеется $N > 2013$ прямых общего положения. Повернем плоскость так, чтобы ни одна прямая не была вертикальной и пронумеруем прямые по возрастанию угловых коэффициентов. Рассмотрим всевозможные тройки чисел (i, j, k), $i < j < k$. Покрасим каждую такую тройку в красный цвет, если точка пересечения i-й и k-й прямой расположена ниже j-й прямой, и в синий — если выше. По теореме Рамсея при достаточно большом N существуют 2013 чисел, для которых все тройки покрашены одинаково. Если все они, скажем, красные, то пересечение верхних полуплоскостей для соответствующих прямых определяет неограниченную выпуклую область, для которых каждая из прямых содержит отрезок границы. Это очевидно, если, например, начать рассматривать эти прямые в порядке возрастания номеров. Таким образом, найденный набор прямых является регулярным.

6. Ответ: за n операций.

Пусть наши числа — $a_1, a_2, \dots, a_n$. Нам понадобится стандартная

Лемма. Если $(A, B) = 1$, M — ненулевое целое число, то в арифметической прогрессии $(A + kB)$ найдется член, взаимно простой с M.

Доказательство. Пусть N — произведение всех простых чисел, которые делят M, но не делят B. Тогда $(N, B) = 1$, поэтому $\alpha B + \beta N = 1$ для некоторых целых α, β. Положим $k = \alpha(1 - A)$. Имеем

$$A + kB = A + \alpha B(1 - A) = A + (1 - A)(1 - \beta N) = 1 - \beta(1 - A)N.$$

Видим, что это число взаимно просто как с B, так и с N, так что оно взаимно просто с M.

Вернемся к задаче. Покажем, что n операций всегда хватит. Предположим, что числа $a_1, \dots, a_{n-1}$ взаимно просты в совокупности. Тогда некоторая целочисленная линейная комбинация $\sum\limits_{k=1}^{n-1} b_k a_k$ равна $1 - a_n$, ее и прибавим к a_n за $n - 1$ операцию. Если же изначально любые $n - 1$ число имеют общий делитель, больший 1, то среди наших n чисел нет нулей. Покажем, что для некоторого целого k числа a_1, a_2, …, a_{n-2}, $a_{n-1} + ka_n$ будут взаимно просты в совокупности. Положим $d = (a_{n-1}, a_n)$, $e = (a_1, \dots, a_{n-2})$, $a_{n-1} = dA$, $a_n = dB$. Тогда $a_{n-1} + ka_n = d(A + kB)$. Первый множитель d взаимно прост с e, второй имеет вид $x + ky$ и при подходящем k взаимно прост с e в силу леммы. Таким образом, число $a_{n-1} + ka_n$ взаимно просто с e, чего мы и добивались. Итак, за одну операцию можно сделать $n - 1$ чисел взаимно простыми в совокупности, еще за $n - 1$ операцию оставшееся число можно, как показано выше, сделать равным 1.

Покажем, что $n - 1$ операции хватит не всегда. Пусть p_1, …, p_n — различные нечетные простые числа. Представим, что нам удалось подобрать числа a_1, …, a_n так, что a_i кратно p_j при $i \neq j$ и $a_i - 2$ кратно p_i. Предположим, что для этих чисел хватило $n - 1$ операции. Тогда для некоторого i операция прибавления целого кратного числа a_i к какому-то другому числу ни разу не проводилась. Это значит, что по модулю p_i наши числа не менялись, но ни одно из них не сравнимо с 1 — противоречие. Осталось понять, как выбрать взаимно простые в совокупности числа $a_1, \dots, a_n$ указанным образом. Пусть $P = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$, $P_i = P/p_i$. Числа P_i и p_i взаимно просты, так что $P_i c_i - 2$ кратно p_i для некоторого целого c_i. Положим $a_i = P_i(c_i + p_i x_i)$ и будем искать целые x_i так, чтобы числа a_i были взаимно просты в совокупности. Ни одно из простых $p_1, \dots, p_n$ их общим делителем не является, так что достаточно добиться взаимной простоты чисел $c_i + p_i x_i$. Можно, например, выбрать $x_1 = 0$, а x_2, пользуясь леммой, подобрать так, что $(c_1, c_2 + p_2 x_2) = 1$.

7. Докажем индукцией по r (база $r = 0$), что $f(i), \dots, f(i + 3^r - 1)$ различны по модулю 3^r при любом i. Пусть для $r = k$ это так. Тогда $f(i), \dots, f(i + 3^k - 1)$ по модулю $2 \cdot 3^k$ дают остатки $1, 3, 5, \dots, 2 \cdot 3^k - 1$ в некотором порядке. Значит, $2^{f(i)}, \dots, 2^{f(i+3^k-1)}$ дают остатки $2, 5, 8, \dots, 3^{k+1} - 1$ (в некотором порядке) уже по модулю 3^{k+1}. Значит,

$$f(i + 3^k) - f(i) = \sum_{j=0}^{3^k-1} 2^{f(i+j)} \equiv 2 + 5 + 8 + \ldots + (3^{k+1} - 1) = 3^k \frac{3^{k+1} + 1}{2} \pmod{3^{k+1}}$$

при всех i. Таким образом, $3^{k+1} \mid f(i + t \cdot 3^k) - f(i)$ тоолько если $3 \mid t$, откуда получаем, что остатки чисел $f(i), \dots, f(i + 3^{k+1} - 1)$ по модулю 3^{k+1} различны.

8. Обозначим середины отрезков OP и OQ через M и N соответственно. Пусть углы треугольника ABC равны α, β и γ соответственно. Докажем, что точки A, M, N, O и T лежат на одной окружности.

Действительно, $PO \perp AB$ и $QO \perp AC$, поэтому $\angle MON = 180^\circ - \alpha$. С другой стороны, $\angle APO = \angle BPO = 90^\circ - \angle PBA = \beta$. Аналогично, $\angle AQO = \gamma$. Более того, $\angle POA = \gamma$ и $\angle AOQ = \beta$. Это означает, что треугольник APO подобен треугольнику AOQ и $\angle PAO = \angle OAQ = \alpha$. Тогда $\angle MAO = \angle NAQ$ и, следовательно, $\angle MAN = \angle MAO + \angle OAN = \angle NAQ + \angle OAN = \alpha$. Поэтому точка A лежит на описанной окружности треугольника MON. Так как $\angle AMO = \angle ANO = 90^\circ$, то на этой же окружности лежит точка T, причем TO — диаметр этой окружности. Следовательно $\angle TAO = 90^\circ$ и прямая TO касается описанной окружности треугольника ABC.

9. Ответ: $f(x) = x$.

Рассмотрим $x \neq z \in [0, +\infty)$, $f(2f(x) + 0) = 2x + f(0) \neq 2z + f(0) = f(2f(z) + 0)$, следовательно, $f(x) \neq f(z)$, т.е. функция инъективна. Теперь рассмотрим выражение

$$f\big(2f(x + z) + 0\big) = 2(x + z) + f(0) = 2x + 2z + f(0) = 2x + f\big(2f(z) + 0\big) = f\big(2f(x) + 2f(z) + 0\big).$$

Из инъективности получаем, что $2f(x+z)+0 = 2f(x)+2f(z)+0$, т.е. $f(x+z) = f(x)+f(z)$. Следовательно, $f(0) = 0$ и функция f монотонная.

$$f(f(x)) = \frac{f(f(x)) + f(f(x))}{2} = \frac{f(2f(x))}{2} = \frac{f(2f(x) + 0)}{2} = \frac{2x + f(0)}{2} = \frac{2x}{2} = x.$$

Докажем, что $f(x) = x$ для любого $x \in [0, +\infty)$. Если, скажем, $f(x) < x$ при каком-нибудь x, то в силу монотонности $f(x) < f(f(x)) = x$, противоречие. Аналогично разбирается случай $f(x) > x$.

10. Ответ: такие многочлены существуют только при $n = 1, 2$.

Пусть $n > 2$. Сначала сделаем линейную замену переменной так, чтобы корни многочлена $P(Q(x))$ стали равны $0, \ldots, n^2 - 1$.

Пусть $c_1 < \cdots < c_k$ — все вещественные корни многочлена P. Любой корень $P(Q(x))$ — это решение уравнения $Q(x) = c_i$ для некоторого i. Отсюда получаем, что $k = n$ и каждый многочлен $Q(x) - c_i$ имеет n корней. Нарисуем график $Q(x)$. В нем ровно n участков монотонности, следовательно прямая $y = c_i$ пересекает все участки монотонности. Посмотрев на график, можно заметить, что прямые пересекают первый участок монотонности в точках с x-координатами $0, \ldots, n - 1$, второй — в точках $n, \ldots, 2n - 1$, но в обратном порядке, так как на этом участке другой тип монотонности, и так далее.

Рассмотрим многочлен $Q(x) - c_i$. Так как $\deg(Q - c_i) = n > 2$, то сумма корней и сумма квадратов корней этого многочлена не зависит от c_i. Значит,

$$0 + (2n - 1) + 2n + (4n - 1) + \ldots = 1 + (2n - 2) + (2n + 1) + (4n - 2) + \ldots,$$
$$0^2 + (2n - 1)^2 + (2n)^2 + (4n - 1)^2 + \ldots = 1^2 + (2n - 2)^2 + (2n + 1)^2 + (4n - 2)^2 + \ldots.$$

Так как в первом равенстве соответствующие слагаемые отличаются на 1, то n четное. Тогда второе можем переписать в виде $\sum\limits_{k=0}^{n/2-1} ((kn)^2 + (kn + 2n - 1)^2) = \sum\limits_{k=0}^{n/2-1} ((kn + 1)^2 + (kn + 2n - 2)^2)$, но это невозможно так как в правой части соответствующая сумма квадратов всегда меньше.

Лига тактик

1. Ответ. 10 красных клеток. Пример. Раскрашены клетки с координатами $(1, 2)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 3)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$.

Оценка. Пусть красными являются a угловых клеток, b примыкающих к сторонам (но не угловых) клеток и c клеток, не примыкающих к сторонам. Суммируя количества красных клеток по всем (перекрывающимся) квадратам 2×2, получаем, что $a + 2b + 4c = 32$. Обозначим $a + b + c = k$. Из равенства $a + 2b + 4c = 32$ следует, что $c \leqslant 8$. Если $c = 8$, то $a = b = 0$. Легко видеть, что требуемых раскрасок в этом случае нет. Если $c = 7$, то единственная возможность, при которой $k < 10$ – это $b = 2$ и $a = 0$. Если $c \leqslant 6$, то всегда $k = a + b + c \geqslant 10$.

Разберем подробно единственный случай, при котором $k < 10$ — случай $a = 0$, $b = 2$, $c = 8$. Пусть он возможен. Тогда у квадрата 5×5 есть хотя бы две стороны, к которым не примыкают красные клетки. Пусть одна из них верхняя. Так как есть всего 4 квадрата 2×2 с полностью синей верхней стороной, и к верхней строке квадрата 5×5 примыкает как раз 4 квадрата 2×2, то полностью синий квадрат 2×2 примыкает к верхней стороне. Аналогичное верно и для другой стороны квадрата 5×5, к которой не примыкают красные клетки. Так как полностью синий квадрат 2×2 на доске один, то он должен примыкать к углу (для определенности к левому верхнему), а полностью синие стороны – это верхняя и левая. Тогда клетки $(2, 3)$ и $(3, 2)$ должны быть красными. Посмотрев зорким взглядом на раскраски квадратов 2×2 с координатами верхних левых клеточек $(1, 2)$ и $(2, 1)$, замечаем противоречие.

2. Лемма. Если a, b, $c \in \mathbb{Q}$ и $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \in \mathbb{Q}$, то $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c} \in \mathbb{Q}$.

Доказательство леммы. Так как $s = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \in \mathbb{Q}$, то возведя в квадрат и поделив на 2, получаем, что $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \in \mathbb{Q}$. Обозначим $\sqrt{abc} = p$. Повторив тот же прием, получаем, что $\sqrt{abc}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) = s\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$, откуда $\sqrt{abc} \in \mathbb{Q}$. Поэтому

$$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = \sqrt{a}(\sqrt{b} + \sqrt{c}) + \frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}(s - \sqrt{a}) + \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{a}} \in \mathbb{Q},$$

откуда $\sqrt{a}(s + \frac{\sqrt{p}}{a}) - a \in \mathbb{Q}$. Следовательно, $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$. Внимательный читатель справедливо заметит, что в доказательстве мы несколько раз делили на всякие числа, которые могут равняться нулю. Однако это возможно лишь при $a = 0$, в этом случае рациональность a очевидна.

Перейдем к решению задачи. По лемме каждое из трех чисел под радикалами должно быть точным квадратом рационального числа: скажем, $\frac{2013}{x+y} = (\frac{p}{q})^2$. Так как число 2013 свободно от квадратов, то $x+y = 2013a^2$ для некоторого $a \in \mathbb{Z}$. Аналогично $y+z = 2013b^2$, $z+x = 2013c^2$, где $b, c \in \mathbb{Z}$. По условию число $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ является целым, и, кроме того, сумма $a+b+c \equiv (x+y)+(y+z)+(z+x)$ является четной. Нетрудно убедиться, что это возможно только при $(a,b,c) = (4,4,2), (4,2,4), (2,4,4)$. Отсюда получаем три решения: набор чисел $(2 \cdot 2013, 2 \cdot 2013, 14 \cdot 2013)$ и его перестановки.

3. Оценка. Сопоставим каждому отрезку $[i,j]$ его вес $i+j$. Тогда разные отрезки не могут иметь одинаковые веса. Действительно, два отрезка могут иметь одинаковые веса только в том случае, когда один содержится в другом, но тогда по условию у них есть общий конец, и из совпадения весов вытекает совпадение других концов. Итак, отрезков не больше, чем вариантов весов, то есть не больше, чем количество чисел от $(0+1)$ до $(2012+2013)$, которое равно 4025.

Пример. Рассмотрим все отрезки с концами в точке 0 и все отрезки с концами в точке 2013.

4. Ответ: нет.

Заметим, что числа $Q(2^k)$ при всех k от 1 до 2013^2 являются корнями многочлена $P(x)$. Так как каждое свое значение многочлен $Q(x)$ принимает не более 2013 раз, значит среди перечисленных 2013^2 чисел не менее 2013 различных. Отсюда получаем, что у многочлена $P(x)$ не менее (но и не более) 2013 корней. Тогда условие означает, что числа 2^k, $k = 1..2013^2$, разбиваются на 2013 групп по 2013 чисел в каждой, эти группы — корни уравнений $Q(x) = a_m$, где a_m — корни полинома $P(x)$. Заметим, что суммы чисел в этих группах равны, так как в силу теоремы Виета они зависят только от коэффициентов многочлена $Q(x)$ при x^{2012} и x^{2013}. Но разбить данные в условии задачи числа на группы с равными суммами невозможно, так как последнее число 2^{2013^2} больше суммы остальных.

5. Ответ: это функции $\pm x + c$.

Пусть a, $b \in \mathbb{R}$. Предположим, что $b > a$ и $b - a = d$. Тогда образы интервалов $(a-d, a)$, (a,b) и $(b, b+d)$ — это три интервала длины d, а образ интервала $(a-d, b+d)$ — это интервал длины $3d$. Однако, образ последнего интервала отличается от объединения образов первых трех интервалов только добавлением точек $f(a)$ и $f(b)$. Отсюда следует, что эти точки разбивают образ интервала $(a-d, b+d)$ на три интервала длины d. Отсюда следует, что $|f(b) - f(a)| = d = |b-a|$. Это равенство верно при всех a и b. Тогда имеем: $|f(x) - f(0)| = |x|$, откуда $f(x) = \pm x + f(0)$ (знак выбирается при каждом x независимо). Обозначим через c значение $f(0)$. Если $f(1) = 1 + c$, то равенство $|f(x) - f(1)| = |x - 1|$ означает, что $f(x) = x + c$ при всех x. Аналогично, если $f(1) = -1 + c$, то мы имеем равенство $f(x) = -x + c$. Очевидно, что все найденные функции подходят.

6. Заметим, что так как угол ACE прямой (AE — диаметр), достаточно доказать, что равны углы BCA и DCK. Для этого мы просто докажем, что в треугольниках ABC и CDK равны остальные углы. Имеем $\angle BAC = \angle KBC$ (угол между касательной и хордой) и $\angle KBC = \angle CDK$ (углы, опирающиеся на одну дугу). С другой стороны $\angle ABC = \angle AEC = \angle CKD$ (первое равенство — это углы опирающиеся на дугу AC, второе равенство верно потому, что оба эти угла дополняют угол EAC до прямого).

7. См. решение задачи 2 лиги стратегий.

8. См. решение задачи 4 лиги стратегий.

9. Заметим, что $k! \,\vdots\, 10$ при $k > 4$. Пусть $S_{n,k}$ — это число способов разбить n-элементное множество на k блоков (порядок которых неважен). Тогда при $n > 4$

$$F_n = \sum_{k=1}^{n} k! S_{n,k} \equiv S_{n,1} + 2S_{n,2} + 6S_{n,3} + 24S_{n,4} \pmod{10}.$$

Как нетрудно подсчитать,

$$S_{n,1} = 1, \quad S_{n,2} = 2^{n-1} - 1, \quad S_{n,3} = \frac{1}{2}(3^{n-1} - 2^n + 1), \quad S_{n,4} = \frac{1}{6} \cdot 4^{n-1} - \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1} + 2^{n-2} - \frac{1}{6}.$$

Теперь проверка нужной нам периодичности — это стандартное упражнение на счет остатков.

10. См. решение задачи 8 лиги стратегий.

Решения задач 4 тура

Лига стратегий

1. Пронумеруем вершины турнира от 1 до $2n$, так чтобы было максимальное количество ребер $a \to b$, где $a < b$. Теперь пронумеруем вершины дерева, начиная от корня; корню сопоставим 0, а дальше единственное требование — чтобы предок каждой вершины имел меньший номер, чем сама вершина. Будем вкладывать наше дерево в граф, для этого для каждой вершины дерева с номером i найдем в графе подходящую вершину с номером x_i, так чтобы вершины x_i, кроме того, что они моделируют наше дерево, удовлетворяли требованиям $x_0 = 1$ и $x_i \leqslant 2i$ для $i > 0$.

Последовательность x_i строим по индукции. Пусть последовательность $x_1, \ldots, x_{k-1}$ уже построена, и хотим построить x_k. Пусть в дереве предком k-й вершины является i-я. Из правила выбора нумерации вершин графа следует, что из вершины x_i выходит к вершинам с номерами от $i+1$ до $2k$ не менее $\frac{2k-x_i}{2}$ ребер. Пусть x_z — член последовательности из промежутка $[x_i, 2k]$, имеющий наименьший индекс. Тогда $z \leqslant i$, и $x_i \leqslant x_z \leqslant 2z$. Неравенство $x_j > x_i$ возможно только для номеров $j = z, \ldots, k-1$, кроме i, число таких номеров не превосходит $k-z-1$. Посмотрим, сколько существует номеров s, где $x_i < s \leqslant 2k$, которые непригодны для того, чтобы назначить их в качестве очередного x_k. Это в точности те s, которые либо совпадают с каким-то x_j (их количество не превосходит $k-z-1$), либо для которых в графе нет ребра $x_i \to s$ (количество таких s не больше $\frac{2k-x_i}{2}$). Итого, количество непригодных номеров не превосходит

$$k - z - 1 + \frac{2k - x_i}{2} = 2k - x_i + (x_i/2 - z - 1) < 2k - x_i.$$

Следовательно, мы сможем выбрать очередное $x_k \leqslant 2k$.

2. Будем называть отрезок $[p, q]$ хорошим, если для чисел p и q выполняется неравенство из условия. Построим покрытие множества чисел от 1 до n хорошими отрезками, такое что все целые числа от 1 до n принадлежали одному или двум хорошими отрезками из этого покрытия.

В качестве первого отрезка, возьмем любой, накрывающий единицу. Если построенной покрытие покрывает числа от 1 до $k-1$, а k еще не покрыто, добавим к покрытию хороший отрезок, содержащий k, с максимальным правым концом. Нетрудно видеть, что при таком способе добавления отрезков мы ни одно число не покроем больше двух раз.

Построенное покрытие накрывает числа $1, \ldots, n$ не более двух раз, а числа больше n — не более одного раза. Пусть i_1, i_2, …— числа накрытые два раза. Выпишем сумму соответствующих неравенств.

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i+1} + x_{i_1+1} + \ldots + x_{i_k+1} \leqslant 0,99\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i + x_{i_1} + \ldots + x_{i_k}\Big),$$

Добавим в правую часть $0,01(x_{i_2} + \ldots + x_{i_k})$ и воспользуемся очевидным наблюдением, что $x_{i_k+1} \geqslant x_{i_{k+1}}$, получим неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i+1} < 0,99\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i + x_{i_1}\Big),$$

Внеся $x_1 = 1$ под знак суммы в левой части и заменив x_{i_1} на 1 в правой, получим $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - 1 < 0,99\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + 1\Big)$. Отсюда $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leqslant 199$.

3. Предположим противное. Тогда, подставляя $n = 1$, получаем, что -1 квадратичный вычет по модулю p. Посмотрим на многочлен $f(z) = z^5 + z^4$ по модулю p. По предположению он принимает не более $k = (p+1)/2$ различных значений. Пусть эти значения принимаются c_1, c_2, ..., c_k раз (возможно, среди c_i есть нули). Тогда количество упорядоченных пар различных чисел (a, b) таких, что $f(a) = f(b)$, равно $\sum c_i(c_i - 1)$. Минимальное значение этой величины при условии $\sum c_i = p$ достигается, когда одно из чисел равно 1, а остальные равны 2, и составляет $p - 1$. Для каждой такой упорядоченной пары посмотрим на частное $t = b/a$. Оно по разу принимает значения 0 и ∞ (в смысле $a = 0$), не принимает значения 1 и -1. При данном $t \neq 0, 1, -1, \infty$ получаем уравнение $a^4(1-t^4) = a^5(t^5-1)$, $a = -(1+t)(1+t^2)/(1+t+t^2+t^3+t^4)$. Подходит не более одного a для каждого t, причем для квадратных корней из -1 не подходит ни одного a. Значит, будет еще не более чем $p-5$ подходящих t, и общее число упорядоченных пар (a, b) не превосходит $2 + (p-5) = p - 3$. Противоречие.

4. Доказываем по индукции, база очевидна.

Переход, рассмотрим одну триангуляцию с двумя ушами. Раз в триангуляции ровно два уха, то каждый треугольник опирается на границу.

Лемма. Пусть дан четырехугольник, состоящий из двух треугольников триангуляции, примыкающих друг к другу по диагонали ℓ_1, у которого две противоположные стороны лежат на границе n-угольника. Если этот четырехугольник разбить на два треугольника с помощью другой диагонали ℓ_2, то у полученной триангуляции будет то же самое количество ортогональных триангуляций.

Доказательство. Пусть T_1 — множество триангуляций, ортогональных исходной триангуляции (в которой проведена диагональ ℓ_1), T_2 — множество триангуляций, ортогональных второй триангуляции (в которой проведена диагональ ℓ_2) Выкинем из множеств T_1 и T_2 общие элементы. Тогда в T_1 останутся триангуляции, содержащие диагональ ℓ_2, а в T_2 — содержащие ℓ_1. Проверим, что тех и других поровну.

Разрежем n-угольник по диагонали ℓ_1. Получится два многоугольника с дву-ухими триангуляциями, Если триангуляции в этих половинах имеют по b и c ортогональных, то T_2 содержит bc триангуляций. При разрезании по диагонали ℓ_2 получается разбиение многоугольника, изоморфное предыдущему. Значит, T_1 тоже содержит bc триангуляций. Лемма доказана.

Осталось проверить, что из одной триангуляции с двумя ушами можно получить любую другую с помощью перестроек описанных в лемме. Это легко.

5. Предположим, что $x^m(x-a)^n+p=f(x)g(x)$. Тогда $f(a)g(a)=f(0)g(0)=p$. Не умаляя общности, $f(0)=1$, тогда $g(0)=p$. Поскольку $f(0)-f(a)$ кратно a, получаем (здесь используется, что $a>p+1$), что $f(a)=1$, $g(a)=p$. Тогда $f(x)=1+x(x-a)h(x)$. Рассматривая редукции многочленов по модулю p, мы получаем, что $1+x(x-a)h(x)$ делит $x^m(x-a)^n$, но эти многочлены, очевидно, взаимно просты. Такое возможно только если по модулю p многочлен h равен 0, то есть если все его коэффициенты суть целые числа, кратные p. Но тогда старший коэффициент многочлена $f(x)g(x)$ кратен p — противоречие.

6. Не умаляя общности, будем считать, что $AB>AC$. Пусть N — середина дуги BC. Заметим, что $AM\perp AK$ и $A'N\perp MK$. Заметим, что прямые AM и $A'N$ пересекаются в точке R. Тогда K — ортоцентр треугольника MNP. Так как прямая BC проходит через точку K и перпендикулярна прямой MN, то точка R лежит на прямой BC. Пусть MN и AA' пересекаются на проективной плоскости в точке P. Докажем, что поляры точек T, R и K пересекаются в одной точке (на проективной плоскости). Действительно, поляра точки T — это прямая AA', поляра точки R — прямая KP, а поляра точки K — это прямая RP. Они пересекаются в точке P.

7. Обозначим $a+c=x$, $b+d=y$, тогда $x+y=2$. Левая часть не превосходит

$$(ab+bc+cd+da)(a^2+b^2+c^2+d^2+2ac+2bd)=xy(x^2+y^2)\leqslant(x+y)^3/4=2.$$

8. Положим $z=x+iy$. Тогда первая система равносильна уравнению $z^2-1/z=3i$, вторая — уравнению $z^3-3iz=1$.

9. Пусть M — середина A_1B_1, N — середина AB, H' и N' — точки, симметричные точкам H и N относительно точки M. Заметим, что $\angle B_1NA_1=\angle B_1N'A_1=\angle AKB$. При этом $AK=BK$ и $B_1N'=A_1N'$. Также, H' — ортоцентр треугольника A_1B_1C.

Заметим, что треугольник ABC подобен треугольнику A_1B_1C. При этом, точка K треугольника ABC соответствует точке N' треугольника A_1B_1C. Точка H соответствует точке H', а точка N — точке M. Тогда треугольник KNH подобен треугольнику $N'MH'$ и $\angle KHN=\angle N'H'M$. С другой стороны $\angle N'H'M=\angle MHN$ по симметрии. Тогда $\angle KHN=\angle MHN$ и точки K, H, M и H лежат на одной прямой.

10. Лемма. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, $AB=2x$, $BC=y$, точка P лежит на отрезке CD. Тогда $\min(AP,BP)\leqslant\sqrt{x^2+y^2}$.

Доказательство леммы. Используя теоремы косинусов для треугольников BCP, ADP получаем тождество

$$AP^2\cdot PC+BP^2\cdot PD=(y^2+PC^2)\cdot PD+(y^2+PD^2)\cdot PC=2x(y^2+PC\cdot PD)\leqslant 2x(y^2+x^2),$$

откуда лемма сразу следует.

Пусть P — произвольная точка внутри параллелограмма со сторонами $2a, 2b$. Проведем через P отрезок с концами на двух параллельных сторонах параллелограмма, параллельный другой стороне. Параллелограмм разобьется на два, к меньшему из них применим лемму. Получим, что расстояние от одной из вершин параллелограмма до точки P не превосходит $\sqrt{a^2+b^2}$.

Пусть теперь Q — произвольная точка внутри параллелепипеда с ребрами $2a, 2b, 2c$. Проведем через Q отрезок PP' с концами на двух параллельных гранях параллелепипеда, параллельный ребру длины $2c$. Найдем в грани, содержащей точку P, вершину A такую, что $PA \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$. Осталось еще раз применить лемму к параллелограмму $APP'A'$ (AA' — ребро длины $2c$).

Лига тактик

1. Доказываем индукцией по числу иголок, база — одна иголка. Рассмотрим иголку A с самым левым лк (пк и лк – правый конец и левый конец). Выкинем ее. Среди оставшихся по предположению индукции найдется нужная иголка B. Если A не препятствует B, то все доказано. Пусть препятствует. Рассмотрим два случая: 1) иголка B целиком выше A; 2) лк B находится левее пк A.

1) Вернем A и удалим B. По предположению индукции найдется падающая иголка C. Вернем B. Тогда C тоже может упасть. В самом деле, иголке C может препятствовать только B, то тогда иголке C препятствовала бы и иголка A, так как B находится целиком выше A.

2) Заметим, что тогда ни одна иголка не пересекает вертикальный луч, идущий вниз от пк A (пересекающая иголка мешала бы иголке B). Значит, либо A может упасть, либо есть препятствующие иголки для иголки A, но все они лежат целиком ниже A (так как у A самый левый лк). Оставим только эти иголки, выкинув все остальные. По предположению индукции есть падающая иголка C. Вернем все выкинутые иголки. Ни одна из них не может препятствовать C, так как C находится строго ниже A, а все возвращенные иголки не имеют ни одной точки, находящейся строго ниже A.

2. Блоком будем называть треугольник исходной решетки, в котором мы отметили центр, точнее, блок — это подграф на базе такого треугольника: 4 вершины и 6 ребер. Для любого полного паросочетания каждый блок содержит либо одно, либо два его ребра. Как нетрудно подсчитать, число блоков равно $\frac{1}{2}n(n+1)$, а число ребер в полном паросочетании (т.е. половина числа вершин графа) равно $\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{n+1}{2}$. Таким образом, любое полное паросочетание содержит ровно $(n+1)/2$ блоков с двумя ребрами. Теперь осталось заметить, что мы можем независимо поворачивать каждый блок вокруг его центра на $\pm120^\circ$, что позволяет разбить множество всех паросочетаний на группы по $3^{(n+1)/2}$ паросочетаний (паросочетания из одной группы имеют одинаковый комплект двухреберных блоков).

3. Заметим сперва, что если одно из чисел a_k равно 1, то данное в условии произведение делится на a, в то время как число $a^{n+1}+a-1$ взаимно просто a. Таким образом, будем считать, что $a_k > 1$.

Пусть тогда $a = ba_1a_2\ldots a_n$, и пусть оказалось, что

$$a^{n+1}+a-1 = c(a+a_1-1)(a+a_2-1)\ldots(a+a_n-1).$$

Ясно, что $b \leqslant a-1$. Теперь, так как все a_k не меньше 2, мы имеем неравенство:

$$c \leqslant \frac{a^{n+1}+a-1}{(a+1)^n} < a.$$

С другой стороны, несложно видеть, что b и c сравнимы по модулю $a-1$. Это означает, что $b=c$. Кроме того, легко видеть, что $a+a_k-1 \leqslant aa_k$. Отсюда имеем неравенство

$$(a^{n+1}+a-1)/b = (a+a_1-1)(a+a_2-1)\ldots(a+a_n-1) \leqslant aa_1\cdot aa_2\cdot aa_3\cdot\ldots\cdot aa_n = a^{n+1}/b,$$

что и приводит к противоречию.

4. См. решение задачи 1 лиги стратегий.

5. См. решение задачи 4 лиги стратегий.

6. Представив каждое слагаемое в виде $\frac{a^3}{a^2+bc} = a - \frac{abc}{a^2+bc}$, запишем неравенство в виде

$$x+y+z \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} + xyz\Big(\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+zx}+\frac{zx}{z^2+xy}\Big).$$

По неравенству о средних $x^2+yz \geqslant 2x\sqrt{yz}$ и т.п., таким образом, достаточно проверить, что

$$x+y+z \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\,).$$

Это неравенство является суммой двух простых неравенств

$$\frac{x+y+z}{2} \geqslant \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{xz}}{2} \qquad \text{и} \qquad \frac{x+y+z}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(x+y+z)^2} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(xy+yz+xz) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

7. Пример. Многочлен $(x-1)(x-2)\ldots(x-p^2)$ степени p^2 удовлетворяет условию. В самом деле, его значение в любой целой точке является произведением p^2 последовательных чисел. Разобьем это произведение на p групп подряд идущих чисел по p чисел в каждой. В каждой такой группе есть число, кратное p, а в одной группе — кратное p^2.

Оценка. Для произвольного многочлена $g(x)$ через $Dg(x)$ будем обозначать очень полезную штуку — *разностный многочлен* $Dg(x) = g(x+1) - g(x)$. Нетрудно проверить, что $\underbrace{D(D(\ldots D}_{k\text{ раз}}(x^k))) = k!$, и что $\underbrace{D(D(\ldots D}_{k+1\text{ раз}}(x^k))) = 0$. Вернемся к решению задачи. Пусть $f(x)$ — искомый многочлен степени d. Тогда многочлен $D(D(\ldots D(f(x)))) = d!$ также удовлетворяет свойству: все его значения в целых точках делятся на p^{p+1}. Поэтому $d!$ делится на p^{p+1}, что возможно только при $d \geqslant p^2$.

8. См. решение задачи 6 лиги стратегий.

9. См. решение задачи 9 лиги стратегий.

10. Ответ: если n четное, то выиграет второй, если n нечетное — первый. Рассмотрим сначала случай четного n. Второй игрок мысленно разобьет каждый слой на доминошки, сместив разбиение на одну клетку (“кирпичиками”). Теперь на каждый ход первого игрока он будет отвечать ходом в ту же доминошку. Нетрудно видеть, что такая стратегия позволяет всегда иметь ход. Так как игра конечная, то такая стратегия приведет второго игрока в выигрышу.

Если же n — четное, то выиграет первый. После первого хода вырезанная им клетка “запрещает” ходить в три соседние с ней клетки другого ряда. Остаток (без вырезанной и запрещенных клеток) разбивается на доминошки точно так же. Стратегия, аналогичная описанной выше, на этот раз приводит к победе первого игрока.

Комментарии к задачам варианта-light боя Москва–Киев

2. Утверждение доказывается по индукции с помощью переходов $n \to 2n$ и $n \to n+3$.

4. Ответ: $20 \cdot 2013 + 13 \cdot 1993 = 66169$. Нужно выделить левые 20 столбцов и нижние 13 строчек и заметить, что каждая такая точка определяет ровно одну прямую.

5. Ответ: нет. Выделим вершину с большим простым номером. Она имеет с вершиной номер 1 одну смежную вершину, пусть это вершина k. Ясно, что 1 и p не соединены (иначе бы k и p и имели бы общего соседа, что невозможно по выбору p). Значит, 1 и k имеют общую вершину, но при этом не p. Пусть это вершина a. Получается, что p и a имеют общую вершину k, но это невозможно.

7. Запишем, x и y в виде дробей $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, где числа a, b и c взаимно просты в совокупности. Переписав равенство в виде $x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1} = 2$ и подставив в него наши дроби мы получим, что числа a, b, c все четные. Получим противоречие с выбором этих чисел.

8. Несложно доказать, что точки O_A, O_B, O_C лежат на описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ и являются серединами соответствующих дуг. Дальнейшие вычисления тривиальны, получится ответ: $66°$.

Решения и указания к задачам финала

1. Ответ: решения есть, если $n+1$ взаимно просто с 4017.

Обозначим левую часть через $f(x)$. Имеем $f(x) = \frac{n(n+1)}{2} - \sum\limits_{k=1}^{n}\{kx\}$. Решим относительно t уравнение
$$\frac{tn(n+1)}{2} - \frac{n}{2} = 2013n.$$
Его корень $t = \frac{4017}{n+1}$. Пусть S — набор (мультимножество) остатков чисел $4017, 2\cdot 4017, \ldots, n\cdot 4017$ при делении на $n+1$, M — их сумма. Тогда $f(t) = \frac{tn(n+1)}{2} - \frac{M}{n+1}$.

Если $(4017, n+1) = 1$, то $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, $M = \frac{n(n+1)}{2}$, $f(t) = \frac{tn(n+1)}{2} - \frac{n}{2} = 2013n$, так что решение существует.

Если $(n+1, 4017) = d > 1$, то $n+1 = kd$. Тогда S — мультимножество $(d-1)\cdot\{0\} \cup d\{, d, 2d, \ldots, (k-1)d\}$, $M = \frac{d^2k(k-1)}{2} = \frac{(n+1)(n+1-d)}{2} < \frac{n(n+1)}{2}$, так что $f(t) = 2013n + \frac{d-1}{2}$. С другой стороны, среди дробных частей $\{t\}, \{2t\}, \ldots, \{nt\}$ имеется ровно $d-1$ нулей, так что $f(t-0) = f(t) - (d-1) = 2013n - \frac{d-1}{2}$. Итак, $f(t-0) < 2013n < f(t)$, так что значение $2013n$ функция f не принимает.

2. Положим $x-y = a$, $x+y = b$. Тогда $b > a \geqslant 0$, $2(x^2+y^2-2) = a^2+b^2-4 = 2nab$ при некотором натуральном n. Докажем индукцией по $a+b$, что ab делится на n, из этого сразу будет следовать утверждение задачи. В качестве базы возьмем $b = 2$, $a = 0$ и $b = 3$, $a = 1$, $n = 1$. Пусть $a \geqslant 2$. По теореме Виета пара чисел $(a, (2na-b)) = (a, (a^2-4)/b)$ удовлетворяет тому же уравнению, и $0 \leqslant (a^2-4)/b < a$, так что $a(2na-b)$ кратно n, но тогда и ab кратно n, что и требовалось.

3. Положим $EQ = yb/2$, $FR = zc/2$, $DP = xa/2$. Тогда
$$w := EQ + FR + DP \geqslant \frac{b(y+z)+xa}{2} \geqslant \sqrt{abx(y+z)}.$$
Аналогично $w \geqslant \sqrt{aby(x+z)}$, $w \geqslant \sqrt{abz(x+y)}$. Итак, достаточно доказать, что из чисел $x(y+z)$, $y(x+z)$, $z(x+y)$ хотя бы одно не меньше 1. По теореме Менелая
$$(1+X)(1+Y)(1+Z) = -(1-X)(1-Y)(1-Z),$$
где $X = \pm x$, $Y = \pm y$, $Z = \pm z$. То есть $1+XY+YZ+ZX = 0$. Все числа XY, YZ, ZX отрицательны быть не могут, если, например, $XY \geqslant 0$, то $z(x+y) \geqslant |ZX+ZY| = |1+XY| \geqslant 1$.

4. Ответ: не всегда.

Положим $x = \sum 3^{-n_k}$ для некоторой быстро возрастающей последовательности $n_1 < n_2 < \ldots$ и положим $N = 3^{3n_k}$. Тогда, если n_{k+1} достаточно велико, числа $x, 2x, \ldots, Nx$ достаточно близки к рациональным со знаменателем 3^{n_k}, так что дробная часть каждого из них отличается от $1/2$ не менее чем на $3^{-n_k-2} > 1/\sqrt{N}$.

5. Будем считать, что в графе могут быть кратные ребра (но паросочетания, отличающиеся лишь выбором кратного ребра, различать не будем).

Докажем, что в графе с единственным паросочетанием есть мост, являющийся ребром паросочетания. Допустим, что это не так, рассмотрим минимальный по количеству вершин и ребер контрпример.

1 случай. Есть ребро, не принадлежащее паросочетанию, при удалении которого граф теряет связность. Тогда граф распадается на две компоненты, в каждая из которых уже не является контрпримером, и значит, в каждой компоненте либо есть нужный нам мост, либо второе паросочетание, последнее невозможно, так как тогда и в изначальном графе найдется второе паросочетание.

2 случай. При удалении каждого из ребер, не принадлежащих паросочетанию, граф остается связным. Так как при удалении ребра граф перестает быть контрпримером, в нем найдется мост, лежащий в паросочетании. Очевидно, что в графе количество ребер, не вошедших в паросочетание, больше, чем количество ребер, задействованных в паросочетании. Это так, поскольку у каждой вершины есть одно ребро, вошедшее в паросочетание, и не менее одного не вошедшего, причем

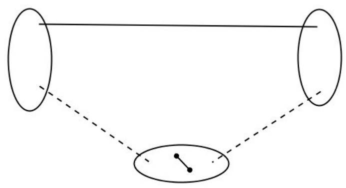

Рис. 1:

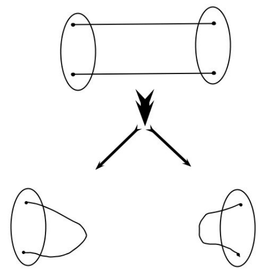

Рис. 2:

если у всех вершин было бы по одному ребру, не вошедшему в паросочетание, граф представлял бы собой четный цикл, для которого утверждение задачи очевидно.

Поставим в соответствие удаляемому ребру этот мост. Тогда каким-то двум ребрам будет сопоставлен один и тот же мост (см. рис. 1, на рисунке сплошные линии — ребра паросочетания, пунктирные — не из паросочетания). Удаляя оба пунктирных ребра, мы найдем в нижней компоненте связности, в силу того, что она также не является контрпримером, мост, принадлежащий паросочетанию.

Либо этот он и в изначальном мост и все ок, либо нет. Тогда при удаление двух ребер из паросочетания на картинке 1 граф распадется на две компоненты.

Смотри картинку 2. Делаем такую замену. Если в каком-то есть мост из паросочетания то и в изначальном есть. Значит, в каждом есть по второму паросочетанию. Если в одном из них есть второе паросочетание в котором крайнее ребро входит в паросочетания, то и в изначальном есть второе.

Если в обоих не входит во втором парсоче крайнее, то из них соберем второе в изначальном.

6. Сперва докажем лемму.

Лемма. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ (сейчас мы используем независимые от условия задачи обозначения) $\angle D + \frac{1}{2}\angle B = 180°$ и диагональ BD делит угол B пополам. Обозначим через M середину стороны AD, а через N — точку пересечения отрезка BM и диагонали AC. Тогда четырехугольник $CBND$ — вписанный.

Простым счетом подсчетом углов легко убедится, что треугольники BCD и ABD подобны. Теперь заметим, что $\frac{\sin ABM}{\sin MBD} = \frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AD} = \frac{\sin CAD}{\sin ACD}$. Но так как $\angle ABM + \angle MBD = \angle CAD + \angle ACD = \frac{1}{2}\angle B$ равенство отношений синусов влечет равенство углов MBD и ACD, что и требовалось.

Еще проще убедиться что в подобных треугольника BCD и BDA лучи CA и DN соответственны, так как делят соответственные стороны BD и BA в одинаковом отношении (это следует из теоремы Чевы для треугольника BDC). Отсюда немедленно вытекает равенство углов BCN и BDN (как соответственных).

Теперь перейдем к решению задачи. Выберем на стороне BC точку Q' такую, что $\angle Q'LC = \angle CBL = \angle LBA$. Тогда из леммы вытекает, что точки D', Q', B и L лежат на одной окружности. Отсюда следует, что $\angle MBL = \angle AQ'L$. Так как

$$\angle ABM + \angle MBL = \frac{1}{2}\angle ABC = \angle Q'LC = \angle Q'AL + AQ'L,$$

то мы получаем, что $\angle ABM = \angle Q'AL$, т.е. точка Q' и есть определенная в условии точка Q. Таким образом мы получили, что $BDLQ$ вписанный, и дополнительно мы узнали, что $\angle QLC = \angle CBL$.

Аналогично мы выясняем, что вписан четырехугольник $BELP$ и что $\angle PLA = \angle ABL$. Полученные два равенства углов означают, что также вписан четырехугольник $BPLQ$. Они имеет по три общие вершины ранее оказавшимися вписанными четырехугольниками $BDLQ$ и $BPLE$. Это означает, что все точки B, P, D, L, E и Q лежат на одной окружности и в частности мы получили то, что требовалось.

7. Требуемое разбиение на блоки $\{B_i\}$ может быть построено следующим алгоритмом. Возьмем произвольное разбиение на k блоков. Если результат еще не достигнут, будем выполнять следующие шаги, на каждом из них граница каких-то двух соседних блоков смещается на 1 влево или вправо. Зафиксируем какой-нибудь максимальный блок B_p и выберем ближайший к нему минимальный блок B_q, пусть для определенности $p < q$. Тогда расширим минимальный блок, переместив в него один элемент из B_{q-1}.

Очевидно, при выполнении этих шагов максимальная масса блока в разбиении не увеличивается, а минимальная не уменьшается. Более того, после не более чем kn шагов масса максимального блока B_p уменьшится. Это вызвано тем, что полуинвариант $\sum\limits_{i=1}^{k}|i-p||B_i|$ изначально не превосходит kn и на каждом шаге уменьшается. Как только масса блока B_p уменьшится, мы, если результат еще не достигнут, опять зафиксируем максимальный блок и опять начнем выполнять шаги.

Ясно, что процесс приведет к требуемому разбиению.

8. Сперва введем новые обозначения: $a_k^{n-1} = x_k - 1$. Тогда новые переменные положительны и в произведении дают 1. Рассмотрим знаменатель первой дроби (с остальными мы сделаем аналогичные преобразования):

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + (n-1)x_{n-1} = a_1^{n-1} + 2a_2^{n-1} + \ldots (n-1)a_{n-1}^{n-1} + 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \\ = (n-1) + \left(a_{n-1}^{n-1} + (n-2)\right) + \left(a_{n-1}^{n-1} + a_{n-2}^{n-1} + (n-3)\right) + \left(a_{n-1}^{n-1} + a_{n-2}^{n-1} + a_{n-3}^{n-3} + (n-4)\right) + \ldots + \\ + \left(a_{n-1}^{n-1} + a_{n-2}^{n-1} + \ldots + a_1^{n-1}\right).\end{aligned}$$

Теперь мы каждое из слагаемых (кроме первого) оценим по неравенству о средних для $n-1$ чисел (несколько переменных и несколько единиц). Это уменьшит знаменатели, то есть увеличит оцениваемые дроби. Знаменатель первой дроби (напоминаем, что мы с остальными знаменателями делаем аналогичные преобразования) примет вид:

$$(n-1)a_{n-1} + (n-1)a_{n-1}a_{n-2} + (n-1)a_{n-1}n - 2n - 3 + \ldots + (n-1)a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1 + (n-1).$$

Теперь, домножая на $n-1$ (и вспоминая, что мы уменьшили знаменатели, то есть увеличили дроби), получаем, что нам достаточно доказать что циклическая сумма дробей вида

$$\frac{1}{a_{n-1} + a_{n-1}a_{n-2} + \ldots + a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1 + 1}$$

не превосходит единицы. На самом деле эта сумма просто равна 1. Для того, чтобы это понять, домножим вторую дробь на $a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1$, третью дробь на $a_{n-2}a_{n-3}\ldots a_1$ и так далее (последнюю дробь просто домножим на a_1). Знаменатели получившихся дробей будут равны. а сумма числителей, как несложно понять, как раз будет равна знаменателю. Что и требовалось.

9. Пусть B_n — количество искомых последовательностей длины n, A_n — количество последовательностей длины n, содержащих на местах со 2-го по n-е хотя бы один ноль. Тогда несложно получить рекуррентные соотношения

$$B_n = B_{n-1} + A_n \qquad \text{и} \qquad A_n = 2A_{n-1} + 2B_{n-2} - 1.$$

Проверим первое из них. Если последовательность длины n содержит 0 на втором или далее месте, то такая последовательность учтена в слагаемом A_n. Для оставшихся последовательностей сделаем преобразование — уберем a_1 (сдвинув нумерацию оставшихся членов) и вычтем из каждого a_i единицу. Получится последовательность длины $n-1$, удовлетворяющая условию.

Теперь проверим второе рекуррентное соотношение

$$A_n = 2A_{n-1} + B_{n-2} + (B_{n-2} - 1).$$

Слагаемое $2A_{n-1}$ учитывает последовательности, у которых $a_n = 0$ или 2 и которые содержат ноль на втором или далее месте — до $(n-1)$-го места включительно. Здесь мы пользуемся тем, что последовательность длины $n-1$ всегда можно продолжить, добавив в конец 0 или 1, поэтому здесь присутствует коэффициент 2. Слагаемое слагаемое B_{n-2} учитывает последовательности длины n, в которых первый ноль (кроме a_1) встречается на n-м месте — чтобы получить последовательность длины $n-2$ мы отбрасываем этот ноль и подвергаем последовательность преобразованию, описанному в предыдущем абзаце.

Наконец, слагаемое $B_{n-2}-1$ учитывает последовательности, у которых $a_n \geqslant 2$ и которые содержат ноль на втором или далее месте — до $(n-1)$-го места включительно. Выберем максимальный индекс k $(2 \leqslant k \leqslant n-1)$, для которого $a_k = 0$. По свойству 1) из условия задачи самое первое ненулевое число в последовательности должно быть равно 1. Но так как $a_k = 0$ и $a_n \geqslant 2$, то по свойству 2) из условия задачи ни одно из чисел a_i при $i < k$ не может быть равно 1. Таким образом, первые k членов последовательности равны 0. Заметим, что тогда последовательность $a_{k+1}-1, \ldots, a_n-1$ может быть любой последовательностью длины $n-k$, удовлетворяющей свойствам из условия задачи, и имеющей на конце не ноль. Количество таких последовательностей равно $B_{n-k}-B_{n-k-1}$. Суммируя по всем k, получаем $B_{n-2}-1$.

Для завершения доказательства осталось проверить, $B_i = \frac{1}{2}(3^{i-1}+1)$ и $A_i = 3^{i-2}$ удовлетворяют нашим рекуррентным соотношениям и дают правильный ответ при $n = 2$.

10. Пусть AA_1, CC_1 — биссектрисы треугольника, I — центр вписанной окружности, точка T на дуге BAC такова, что дуги CT, TA вдвое больше углов BA_1C_1, BC_1A_1 соответственно. Имеем

$$CA_1 \cdot CK = CA_1(CA+AB) = CA \cdot CB = CC_1 \cdot CM,$$

так что треугольники CA_1C_1 и CMK подобны, так что $\angle CMK = \angle CA_1C_1$, поэтому прямая KM проходит через точку T. Вторая аналогичная прямая тоже проходит через T. Осталось применить теорему Паскаля к шестиугольнику $TMCBAN$ (N — середина дуги BC).