СУММА УГЛОВ

1. Какое наибольшее количество острых углов может быть в выпуклом n–угольнике ?
2. Можно ли выпуклый 39-угольник разрезать на девять выпуклых 6-угольников?
3. ABCD – выпуклый четырёхугольник, $\angle CBD = \angle CAB$, $\angle ACD = \angle BDA$. Доказать, что $\angle ADC = \angle ABC$.
4. На стороне AB квадрата ABCD во внутреннюю его часть построен равносторонний треугольник ABE. Найти величину угла $\angle EDC$.
5. В треугольнике Δ ABC на стороне AC взята точка E так, что AE=EB=BC. Во сколько раз внешний угол при вершине B больше внутреннего угла при вершине A ?
6. Чему равна сумма пяти углов в вершинах пятиконечной звезды ?

ПОСТРОЕНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА (ПО ТРЁМ ЭЛЕМЕНТАМ)

1. Построить треугольник ΔABC, зная сторону a, высоту h_a и медиану m_a.
2. Построить треугольник ΔABC, зная сторону a, высоту h_a, и R-радиус описанной окружности.
3. Построить треугольник по трём элементам – углу $\angle A$, биссектрисе этого угла l_a , и стороне b.
4. Построить треугольник по трём элементам – периметру и двум углам.
5. Построить треугольник по трём элементам – двум сторонам и медиане к третьей стороне (a, b, m_c).
6. Циркулем и линейкой построить треугольник по трём элементам: углам $\angle B$, $\angle C - \angle A > 0$, и стороне AC.
7. Построить треугольник ΔABC, зная углы $\angle A$, $\angle B$ и r-радиус вписанной окружности.

НЕСТАНДАРТНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

1. Построить параллелограмм по трём элементам – диагонали и двум сторонам.
2. Из данной точки построить окружность, рассекающую данную окружность на две равные дуги.
3. Построить параллелограмм по серединам трёх его сторон.
4. Внутри угла взята точка. Циркулем и линейкой построить отрезок с концами на сторонах угла, который проходит через эту точку и делится ею пополам.
5. Построить прямую, находящуюся на равных расстояниях от трёх данных точек.
6. Через данную точку A внутри данного угла $\angle BCE$ провести прямую, отсекающую от сторон угла равные отрезки.
7. Даны два угла с параллельными сторонами, их смежные стороны пересекаются в точке A. Провести через A прямую, на которой углы высекают равные отрезки.
8. Построить параллелограмм по трём элементам – стороне и двум углам между этой стороной и диагоналями.
9. Построить треугольник по трём элементам – углу $\angle A$, биссектрисе этого угла l_a, b стороне b.
10. Построить равнобедренный треугольник по высоте и углу при вершине.
11. Построить параллелограмм по стороне и двум диагоналям.
12. Построить треугольник по трём элементам – периметру и двум углам.
13. Даны окружность и прямая, не пересекающая окружность. Как с помощью циркуля и линейки построить квадрат, две соседние вершины которого лежат на данной окружности, а две другие вершины - на данной прямой (если известно, что такой квадрат существует)?

НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА,

большая сторона против большего угла

1. Серединный перпендикуляр к стороне BC треугольника ABC пересекает сторону AB в точке D, а продолжение стороны AC за точку A – в точке E. Доказать, что $AD < AE$.
2. Могут ли расстояния от некоторой точки на плоскости до вершин некоторого квадрата быть равными 1,4,7 и 8 ?
3. Доказать, что $m_a > \frac{b+c-a}{2}$.
4. Пусть $m_a > \frac{a}{2}$. Доказать, что угол $\angle A$ – острый.
5. В выпуклом четырёхугольнике ABCD известно, что $AB+BD<AC+CD$. Доказать, что $AB<AC$.
6. Пусть ABCD и $A_1B_1C_1D_1$ – два выпуклых четырёхугольника с соответственно равными сторонами. Пусть $\angle A>\angle A_1$. Доказать, что тогда $\angle B<\angle B_1$, $\angle C>\angle C_1$, $\angle D<\angle D_1$.
7. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) угол $\angle B=20°$. Доказать, что: а) $AB < 3\cdot AC$, б) $AB > 2\cdot AC$.
8. На сторонах AB и BC треугольника ABC с углом $\angle C=40°$ выбраны такие точки D и E, что $\angle BED=20°$. Доказать, что $AC+EC>AD$.
9. На каждой стороне квадрата отмечено по точке. Доказать, что периметр образованного ими четырёхугольника не меньше удвоенной диагонали квадрата.
10. На основании AC равнобедренного треугольника ABC выбрали точку D, а на продолжении AC за вершину C – точку E так, что $AD = CE$. Доказать, что $BD+BE>AB+BC$.
11. Пусть D – середина основания AC равнобедренного треугольника ABC. Точка E – основание перпендикуляра, опущенного из точки D на сторону BC. F – точка пересечения отрезков AE и BD. Какой отрезок длиннее – BF или BE ?

СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ

1. Доказать, что в треугольнике средняя линия равна половине основания и параллельна ему.
2. Дан угол с вершиной A, на его сторонах взяты точки B_1 и B_2 – на одной, и C_1 и C_2 – на другой. Доказать, что если $AB_1 = B_1B_2$, $B_1C_1 \parallel B_2C_2$, тогда $AC_1 = C_1C_2$.
3. В точках A и B, лежащих на разных сторонах угла, восстановлены перпендикуляры к сторонам, которые пересекают биссектрису угла в точках C и D. Доказать, что середина отрезка CD равноудалена от точек A и B.

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

1. Точка D взята на медиане BM треугольника ABC. Через точку D проведена прямая, параллельная стороне AB, а через точку C проведена прямая, параллельная медиане BM. Две полученные прямые пересекаются в точке E. Доказать, что BE = AD.
2. Точки A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, CA, AB соответственно треугольника ABC. На продолжении отрезка C_1B_1 отложен отрезок B_1K, причём $4 \cdot B_1K = BC$. Известно, что $AA_1 = BC$. Доказать, что AB = BK.
3. В четырёхугольнике ABCD точки K,L,M,N – середины сторон AB,BC,CD,DA соответственно. Прямые AL и CK пересекаются в точке P, прямые AM и CN пересекаются в точке Q. Оказалось, что APCQ – параллелограмм. Доказать, что ABCD – тоже параллелограмм.
4. Пусть K и N – середины сторон AB и CD четырёхугольника ABCD. Отрезки BN и KC пересекаются в точке O. Точки пересечения прямых AO и DO со стороной BC делят отрезок BC на три равные части. Доказать, что ABCD – параллелограмм.

РАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ

1. В треугольнике ABC биссектриса из вершины A, высота из вершины B и серединный перпендикуляр к стороне AB пересекаются в одной точке. Найти величину угла A.

2. В выпуклом четырёхугольнике ABCD $\angle A = \angle D$. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке P, лежащей на стороне AD. Доказать, что диагонали AC и BD равны.

3. AF – медиана треугольника ABC. D – середина отрезка AF, E – точка пересечения прямой CD со стороной AB. Оказалось, что BD = BF = CF. Доказать, что AB = CD.

4. В семиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ диагонали A_1A_3, A_2A_4, A_3A_5, A_4A_6, A_5A_7, A_6A_1 и A_7A_2 равны между собой. Диагонали A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6, A_4A_7, A_5A_1, A_6A_2 и A_7A_3 тоже равны между собой. Обязательно ли этот семиугольник равносторонний?

5. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники A_1BC, AB_1C и ABC_1. Докажите, что $AA_1=BB_1=CC_1$.

6. На отрезке AE по одну сторону от него построены равносторонние треугольники ABC и CDE; M и P - середины отрезков AD и BE. Докажите, что треугольник CPM равносторонний.

7. На сторонах BC и CD квадрата ABCD взяты точки M и K соответственно, причем $\angle BAM = \angle MAK$. Докажите, что BM + KD = AK.

8. Каждая диагональ четырёхугольника делит его на два равных треугольника. Верно ли, что этот четырёхугольник - параллелограмм ?

9. В двух треугольниках равны пара сторон, пара прилежащих к ним углов, и положительная разность двух других сторон. Верно ли, что треугольники равны?

10. В треугольнике ABC выполняется равенство $BC = 2\cdot AC$. На стороне BC выбрана такая точка D, что $\angle CAD = \angle CBA$. Прямая AD пересекает биссектрису внешнего угла C в точке E. Доказать, что AE = AB.

11. В остроугольном треугольнике ABC на сторонах AC и AB отметили такие точки K и L, что прямая KL параллельна BC, KL = KC. На стороне BC выбрана точка такая M, что $\angle KMB = \angle BAC$. Доказать, что KM = AL.

ОКРУЖНОСТЬ И КАСАТЕЛЬНАЯ

1. В треугольнике ABC стороны равны a,b,c. A_1,B_1,C_1 – точки касания сторон BC, CA, AB соответственно вписанной окружностью. Найти длины отрезков AB_1, BC_1, CA_1.
2. В треугольнике ABC стороны равны a,b,c. A_1,B_1,C_1 – точки касания сторон BC, CA, AB соответственно вневписанными окружностями. Найти длины отрезков AB_1, BC_1, CA_1.
3. В треугольнике ABC угол C прямой. Докажите, что $r = (a + b - c)/2$ и $r_c = (a + b + c)/2$

MIXTURA

1. В трапеции ABCD длина боковой стороны AB равна сумме длин оснований AD и BC. Докажите, что биссектрисы углов A и B пересекаются на стороне CD.
2. Доказать, что треугольник прямоугольный тогда и только тогда, если медиана к одной из сторон вдвое меньше ее длины.
3. В треугольнике ΔABC на стороне AC взята точка E так, что AE=EB=BC. Во сколько раз внешний угол при вершине B больше внутреннего угла при вершине A ?

РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

1. ABCD – выпуклый четырёхугольник, в котором $\angle CAD + \angle BCA = 180°$, и AB = BC + AD. Доказать, что $\angle CAB + \angle DCA = \angle CDA$.

2. На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC выбрана такая точка D, что BC = CD. На катете BC взята такая точка E, что DE = CE. Доказать равенство AD + BE = DE.

3. Доказать, что если в треугольнике равны две медианы. То он равнобедренный.

4. В треугольнике ΔABC, AB=BC, $\angle B=36^o$, AE – биссектриса. Доказать, что AE=AC.

5. В трапеции биссектрисы углов при верхнем основании пересекаются на нижнем основании. Доказать, что нижнее основание равно сумме боковых сторон трапеции.

6. В треугольнике ΔABC биссектриса BL, медиана CM и высота AH пересекаются в точке O, причем AO=BO. Доказать, что треугольник – правильный.

<u>Теорема ФАЛЕСА</u>

1. Дан угол $\angle AOB$, на его стороне OA взяты точки A_1 и A_2 так, что $OA_1=A_1A_2$.

   Через точки A_1 и A_2 проведены параллельные прямые, пересекающие луч OB в точках B_1 и B_2. Доказать, что $OB_1=B_1B_2$.

2. Дан угол $\angle AOB$, на его стороне OA взяты точки A_1 и A_2 так, что $OA_1:A_1A_2=2:1$. Через точки A_1 и A_2 проведены параллельные прямые, пересекающие луч OB в точках B_1 и B_2. Доказать, что $OB_1:B_1B_2=2:1$.

3. Дан угол $\angle AOB$, на его стороне OA взяты точки A_1 и A_2 так, что $OA_1:A_1A_2=3:2$. Через точки A_1 и A_2 проведены параллельные прямые, пересекающие луч OB в точках B_1 и B_2. Доказать, что $OB_1:B_1B_2=3:2$.

4. Дан угол $\angle AOB$, на его стороне OA взяты точки A_1 и A_2 так, что $OA_1:A_1A_2=17:19$. Через точки A_1 и A_2 проведены параллельные прямые, пересекающие луч OB в точках B_1 и B_2. Доказать, что $OB_1:B_1B_2=17:19$.

5. Дан угол $\angle AOB$, на его стороне OA взяты точки A_1 и A_2 так, что $OA_1:A_1A_2=m:n$. Через точки A_1 и A_2 проведены параллельные прямые, пересекающие луч OB в точках B_1 и B_2. Доказать, что $OB_1:B_1B_2=m:n$.

6. Циркулем и линейкой разделить отрезок на 7 равных частей.

7. Циркулем и линейкой разделить отрезок в отношении 3:2.

8. Доказать, что точка пересечения двух медиан делит их в отношении 1:2.

XXXL

1. Биссектрисы углов A и B выпуклого четырёхугольника ABCD пересекаются в точке P, а биссектрисы углов C и D – в точке Q, отличной от точки P. Прямая PQ проходит через середину отрезка AB. Доказать, что или $\angle BAD = \angle CBA$, или $\angle BAD + \angle CBA = 180°$.

2. В параллелограмме ABCD выполнено равенство $AB + CD = AC$. На стороне BC взята такая точка K, что $\angle ADB = \angle BDK$. Найти отношение BK:KC.

3. Внутри треугольника ABC на биссектрисе его угла B выбрана такая точка M, что $AM = AC$, $\angle BCM = 30°$. Доказать, что $\angle AMB = 150°$.

4. На сторонах BC, AD, AB ромба ABCD выбраны точки P, Q, R соответственно таким образом, что $DP = DQ$ и $\angle BRD = \angle PDR$. Доказать, что прямые DR, PQ, AC пересекаются в одной точке.

5. На стороне AC треугольника ABC отмечена такая точка K, что $AK = 2\cdot KC$, и $\angle ABK = 2\cdot\angle KBC$. F – середина стороны AC, L – проекция A на BK. Доказать, что прямые FL и BC перпендикулярны.