

8 класс, 5 день

1. Чевяны AD и BE треугольника ABC пересекаются в точке F . Оказалось, что $CD = CF = DF$ и $AF = BD$. Найдите угол BEC .
2. Плоскость покрашена в 11 цветов. Докажите, что для некоторого натурального числа $k \leq 10$ найдутся две точки одного цвета на расстоянии k .
3. AA_1 — биссектриса угла A треугольника ABC . На сторонах AB и AC отмечены точки D и E так, что $\angle AA_1D = \angle B$ и $\angle AA_1E = \angle C$. Прямые AA_1 и DE пересекаются в точке F . Докажите, что $AA_1^3 = AB \cdot AF \cdot AC$.
4. Точки M и N — середины сторон CD и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$. Прямая ℓ проходит через точку M и перпендикулярна прямой AB , а прямая ℓ' проходит через точку N и перпендикулярна прямой BC . Докажите, что прямые ℓ , ℓ' и BD пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $AC \perp BD$.
5. Точки B_1 и C_1 на описанной окружности остроугольного треугольника ABC таковы, что $BB_1 \perp AC$ и $CC_1 \perp AB$. Прямая B_1C_1 пересекает сторону AB в точке M , а прямую AC в точке N . Оказалось, что $B_1N = 3$, $NM = 4$ и $MC_1 = 5$. Найдите угол ABC .
6. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ сторона AB длиннее других сторон и всех диагоналей. Докажите, что либо $CF > CE$, либо $CF > FD$.
7. На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC выбраны точки C_1 , A_1 и B_1 так, что $A_1B_1C_1B$ — параллелограмм. На отрезке A_1C_1 выбрана точка D так, что $\angle AB_1D = \angle B_1DC_1$. Докажите, что прямая DB_1 делит угол ADC пополам.